

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

29. Band, Heft 6

1. Oktober 1948

S. 241—288

Geschichte.

Kennedy, E. S.: Al-Kāshī's „Plate of conjunctions“. *Isis*, Cambridge, Mass. 38, 56—59 (1948).

Eine persische Handschrift im Besitz der Princeton Universität (Ende des 14. oder des 15. Jhdts.) enthält u. a. die Beschreibung eines Recheninstruments, auf dem man die Zeit einer erwarteten Planetenkonjunktion mechanisch interpolieren kann, wenn die Längen der Planeten am vorhergehenden und folgenden Mittag sowie die Länge des Tages bekannt sind. Das Instrument stammt von al-Kāshī, dem ersten Direktor der Sternwarte in Samarkand unter Ulugh Beg (1393—1449).

K. Vogel (München).

Thebault, V.: A french mathematician of the sixteenth century Jacques Peletier (1517—1582). *Math. Mag.*, Texas 21, 147—150 (1948).

Kurze Lebensskizze des bekannten Mathematikers und Dichters, der seine Arithmetik lateinisch schon 1545 drucken ließ (französisch Poitiers 1548 u. ö.) und eine auf beachtlicher Höhe stehende Algebra (Lyon 1554) im Stil der oberitalienischen und deutschen Cossisten herausgab. Am bekanntesten ist der Euklid-Kommentar (Lyon 1557), worin erstmals gesagt wird, daß der Kontingenzwinkel (zwischen Kreisbogen und Tangente) keine geometrisch teilbare Größe, sondern gleich Null ist. Hierüber kam es zu einer längeren Auseinandersetzung mit Chr. Clavius (1537—1612), gegen dessen Einwände sich Peletier klug und geschickt zu verteidigen wußte (Paris 1559 und Basel 1563). Die Zeitgenossen hielten es allerdings vor allem mit Clavius (Euklid-Ausgabe, Rom 1574 und sehr oft). Kurz vor seinem Tod faßte Peletier seinen Standpunkt nochmals in einer (sehr seltenen) Schrift von 14 S. zusammen. Verf. verweist übrigens auf eine in den Fachzeitschriften nicht beachtete biographische Studie von M. Thureau (1934). *J. E. Hofmann*.

Rafael Verhulst, R. P. Enrique de: Leibniz als Philosoph. *Rev. Acad. Ci. exact fisic. natur.* Madrid 41, 5—29 (1947) [Spanisch].

In dieser Skizze stützt sich Verf. vor allem auf die ältere Zweitliteratur; als biographische Quelle dient M. Guhrauer (Breslau 1846), als sachliche Unterlagen die Ausgaben von L. Dutens (Genf 1768), C. I. Gerhardt (Berlin/Halle 1849/63 und Berlin 1875/90) und L. A. Foucher de Careil (Paris 1859/75); weder die neue Leibniz-Ausgabe der Berliner Akademie (seit 1926) noch die einschlägigen bedeutsamen Einzelstudien der letzten 4 Jahrzehnte werden erwähnt. Demgemäß sind die gemachten biographischen Angaben größtenteils überholt; das Mathematische ist nur kurz gestreift und das Entscheidende (die Erfindung der höheren Analysis) wird kaum erwähnt.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Summerhayes, V. S.: Prof. G. H. Hardy. *Obituary.* *Nature*, London 161, 797—798 (1948).

Carruccio, Ettore: Ettore Bortolotti. *Periodico Mat.*, IV. s. 26, 1—13 (1948). Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Whealer, L. P., E. O. Waters and S. W. Dudley: The early work of Willard Gibbs in applied mechanics. New York, Henry Schuman, Inc., 1947. VII, 78 p. \$ 3.00.

L. Prandtl: Georg Hamel siebzig Jahre. *Z. angew. Math. Mech.* 28, 129—131 (1948).

Vogelpohl, G.: Georg Hamel als Lehrer. *Z. angew. Math. Mech.* 28, 131—132 (1948).

Milne, E. A.: James Hopwood Jeans. Monthly Not. astron. Soc., London 107, 46—53 (1947).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● Kraft, Victor: *Mathematik, Logik und Erfahrung*. Wien: Springer-Verlag 1947. VII, 129 S.

● Waismann, Friedrich: *Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik*. Einleitung von Karl Menger. 2. Aufl. Wien: Gerold & Co. 1947. VII, 168 p.

Brunschvieg, Léon: *Les étapes de la philosophie mathématiques*. 3. éd. (Bibliothèque de Philosophie contemporaine). Flammarion Ed. 592 p. avec fig. 400 fr.

Tarski, Alfred: *A problem concerning the notion of definability*. J. symbolic Logic 13, 107—111 (1948).

Es sei \mathfrak{S} ein widerspruchsfreier Formalismus, der so reichhaltig ist, daß in ihm der klassische Bestand der Mathematik dargestellt werden kann. Als Beispiel eines solchen Formalismus kann etwa der unverzweigte einstellige Stufenkalkül dienen. In \mathfrak{S} hat jedenfalls jede Variable eine endliche Ordnung. Der Einfachheit halber kann angenommen werden, daß die Variablen 0-ter Ordnung natürliche Zahlen repräsentieren, die Variablen 1-ter Ordnung Mengen von natürlichen Zahlen (also reelle Zahlen), die Variablen 2-ter Ordnung Mengen von reellen Zahlen usw. Allgemein soll gesagt werden, daß die Variablen n -ter Ordnung Elemente n -ter Ordnung repräsentieren. — Es sei nun Φ ein Ausdruck von \mathfrak{S} , in dem eine gewisse Variable n -ter Ordnung als einzige Variable frei vorkommt. In seiner grundlegenden Abhandlung über den Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen [A. Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia philosophica* 1, 261—405 (1936); dies. *Zbl.* 13, 284] hat Verf. zum erstenmal eine korrekte Definition für die Redeweise: „ a erfüllt Φ “ angegeben; hierbei ist a ein der einzigen freien Variablen von Φ zugeordnetes Element n -ter Ordnung. Mit Hilfe dieser Redeweise lassen sich alle semantischen Begriffe streng fassen, also auch der Begriff der Definierbarkeit. Φ definiert nämlich a genau dann, wenn es genau ein a gibt, das Φ erfüllt. Und weiter: a ist definierbar genau dann, wenn es ein Φ gibt, das a definiert. Die letzte Redeweise kann auch gleichwertig folgendermaßen gefaßt werden: Das Element a von n -ter Ordnung ist in \mathfrak{S} definierbar genau dann, wenn es einen Ausdruck Ψ gibt, in dem eine gewisse Variable $(n-1)$ -ter Ordnung als einzige Variable frei vorkommt und so, daß a die Menge aller Elemente ist, die Ψ erfüllen. — Es erhebt sich nun die Frage, ob der Begriff eines in \mathfrak{S} definierbaren Elementes n -ter Ordnung selbst in \mathfrak{S} definierbar ist; oder anders ausgedrückt, ob es zu jeder natürlichen Zahl n einen Ausdruck Ψ von \mathfrak{S} gibt, der eine Variable n -ter Ordnung als einzige freie Variable enthält und der von genau den Elementen n -ter Ordnung erfüllt wird, die in \mathfrak{S} definierbar sind. Das wesentliche Resultat der vorliegenden Arbeit ist Folgendes: Diese Frage ist für $n=0$ bejahend, für $n \geq 2$ verneinend zu beantworten; für $n=1$ ist dieses Problem dagegen bisher ungelöst. — Die erste Behauptung leuchtet unmittelbar ein. Für den Fall $n \geq 2$ konstruiert der Verf. einen Ausdruck $\varrho(x, y)$, der von genau den Paaren von Mengen von reellen Zahlen erfüllt wird, auf die eine wohlordnende Relation R zutrifft, deren Feld nicht abzählbar ist und aus Mengen von reellen Zahlen besteht [vgl. H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement. *J. Math. pures appl.*, VI. s. 1, 139—216 (1905)]; hierbei kommen in $\varrho(x, y)$ die Variablen x, y von zweiter Ordnung als einzige Variablen frei vor, und außerdem enthält ϱ auch keine gebundenen Variablen von einer Ordnung größer als 1. Es sei nun D_2 die Menge aller in \mathfrak{S} definierbaren Mengen von reellen Zahlen. Diese ist natürlich abzählbar. Also gibt es Mengen a von reellen Zahlen, die zum Felde von R , aber nicht zu D_2 gehören. Da R wohlordnend ist, gibt es also genau eine derartige Menge a_0 , die in der Relation R zu jeder Menge b von reellen Zahlen steht, die zum Feld von R , aber nicht zu D_2 gehört. Wäre nun D_2 in \mathfrak{S} definierbar, so gäbe es also einen Ausdruck $\delta(x)$ mit x als einziger freien Variablen, der von allen Elementen von D_2 und nur von diesen erfüllt wird. Dann ergibt sich aber unmittelbar, daß der Ausdruck

$$\varrho(x, x) \wedge \sim \delta(x) \wedge \forall y (\varrho(y, y) \wedge \sim \delta(y) \rightarrow \varrho(x, y)),$$

in dem $\sim, \wedge, \forall, \rightarrow$ die üblichen aussageerzeugenden Funktoren sind und in dem \forall der Generalisator ist, a_0 definieren würde. Also müßte a_0 zu D_2 gehören entgegen der früheren Behauptung, daß a_0 nicht zu D_2 gehört. Also ist D_2 nicht in \mathfrak{S} definierbar. — Es ergibt sich sogar: Jede Menge, die in \mathfrak{S} definierbar ist und alle definierbaren Mengen reeller Zahlen als Elemente enthält, ist nicht abzählbar. — Für den Fall $n=1$ versagt dieses Beweisverfahren dagegen, wie man leicht einsieht. Es bleibt also die Frage offen, ob der Begriff der in einem formalen System \mathfrak{S} , in dem die Theorie der reellen Zahlen adäquat formuliert werden kann, definierbaren reellen Zahl selbst in \mathfrak{S} definiert werden kann. — Für gewisse fragmentarische Formalismen, in denen mehr oder weniger umfangreiche Teile der Theorie der reellen Zahlen formalisiert werden können, kann

dieses Problem dagegen gelöst werden. Es sei z. B. \mathfrak{S}' ein Formalismus, in dem nur Variablen für reelle Zahlen (aber keine höherer Ordnung) vorkommen und in dem als einzige arithmetische Operationen die Addition und die Multiplikation vertreten sind. Hier gilt, daß die Menge aller in \mathfrak{S}' definierbaren reellen Zahlen ihrerseits in \mathfrak{S}' definierbar ist. Das folgt in der Hauptsache aus einem Theorem, das Verf. früher ohne Beweis für diesen Formalismus angegeben hat [A. Tarski, Sur les ensembles définissables de nombres réels I. Fundamenta Math., Warszawa 17, 210—239, p. 234, Fußnote 2 (1931)]. Der Verf. bemerkt dazu, daß dieses Theorem gleichzeitig einen finiten Wf.- und Vollständigkeitsbeweis für \mathfrak{S}' und ebenfalls ein Entscheidungsverfahren für \mathfrak{S}' liefert. Dieses Resultat ist von großer Tragweite, da es sich auch auf die Elementargeometrie übertragen läßt. Leider ist der Beweis bisher nicht publiziert. Das Theorem selbst ist jedoch eines der wichtigsten Resultate, die in den letzten Jahren gewonnen worden sind. — Mit zwei Bemerkungen beschließt der Verf. diese außerordentlich wichtigen Untersuchungen. Es sei $D_{n,p}$ (wo $n-1 \leq p$) die Menge der Elemente n -ter Ordnung, die in \mathfrak{S} durch Ausdrücke definierbar sind, in denen keine Variablen von höherer als p -ter Ordnung vorkommen. Alle diese Mengen $D_{n,p}$ sind in \mathfrak{S} definierbar, sie sind nämlich Elemente von $D_{n+1,p+1}$. Wird jedoch die Frage erörtert, ob $D_{n,p}$ Element von $D_{n+1,p}$ ist, so ergibt sich ähnlich wie früher, daß diese Frage für $n=0$ zu bejahen, für $n \geq 2$ zu verneinen ist, während sie für $n=1$ ungelöst ist. — Zum Schluß behandelt Tarski die Frage, ob diejenigen Relationen R_n in \mathfrak{S} definierbar sind, die zwischen einem Element a von n -ter Ordnung und einer natürlichen Zahl m genau dann bestehen, wenn a das m -te in \mathfrak{S} definierbare Element n -ter Ordnung ist; hierbei ist das m -te in \mathfrak{S} definierbare Element n -ter Ordnung festgelegt, indem man sich die definierenden Ausdrücke für die definierbaren Elemente n -ter Ordnung auf irgendeine Art abgezählt denkt. Es ergibt sich leicht, daß R_n definierbar ist. Dagegen ist R_n für jedes $n \neq 0$ nicht definierbar; dies folgt leicht unter Anwendung des bekannten Cantorsche Diagonalverfahrens. — Die vorliegende Arbeit ist sowohl wegen ihrer Fragestellungen als auch wegen der Fülle der erreichten Resultate für die Theorie der Definierbarkeit von fundamentaler Bedeutung. Karl Schröter (Berlin).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Chater, N. and W. H. Chater: A chain rule for use with determinants and permutations. Math. Gaz., London 31, 279—287 (1947).

Verff. geben das Vorzeichen eines der $n!$ Produkte einer Determinante $|a_{ik}|$ durch Umordnung der Faktoren des Produktes in „Ketten“ $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_p j_p}$ mit $(-1)^{m+n}$, wo m die Anzahl der Ketten ist. Diese Regel ist offenbar nur ein anderer Ausdruck für die bekannte, daß das Vorzeichen genau dann $+1$ ist, wenn eine gerade Zahl geradzahlgiger Zykeln in der bezüglichen Permutation vorhanden ist. Verff. geben noch einige Anwendungen. Holzer (Graz).

Colombo, C.: Intorno alla distribuzione degli zeri di certi polinomi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 530—535 (1947).

Es handelt sich um die Lage der Nullstellen der Polynome von der Form $f(z) = P(z) - \lambda Q(z)$, $P(z) = (z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_n)$, $Q(z) = (z-b_1)(z-b_2) \dots (z-b_n)$, wenn die Nullstellen von $P(z)$ und $Q(z)$ auf einer konvexen Kurve C liegen und dort die Aufeinanderfolge $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, a_1$ haben und wenn $\arg \lambda$ gegeben ist. Ist $\lambda < 0$ bzw. $\lambda > 0$, so hat das Polynom $f(z)$ keine Nullstelle innerhalb bzw. außerhalb der Kurve C . Ist $0 < |\arg \lambda| = \theta \leq \pi$, so liegt jede Nullstelle von $f(z)$ im Bereich, von dessen Punkten aus die Kurve C unter einem Winkel $\geq \theta$ erscheint. Das Prinzip des Beweises ist die folgende leicht ersichtliche Tatsache:

Bezeichnet ζ eine Nullstelle von $f(z)$ und sind $\arg \frac{\zeta - a_k}{\zeta - b_k} = \vartheta_k$ ($0 \leq \vartheta_k < 2\pi$),

so ist $\arg \lambda \equiv \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n \pmod{2\pi}$. Liegt ζ innerhalb von C , so haben die Winkel ϑ_k dasselbe Vorzeichen, und $|\sum \vartheta_k| < 2\pi$. Liegt ζ außerhalb von C , so ist $|\sum \vartheta_k| \leq \theta \leq \pi$. Sind $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$, so liegen die Nullstellen von $f(z)$ im Kreiswzick, von dessen Randpunkten aus die Strecke (a_1, b_n) unter dem Winkel θ erscheint, und zugleich in derselben (oberen oder unteren) Halbebene wie der Punkt λ . Ist also λ rein imaginär, so enthält die Kreisscheibe vom Durchmesser (a_1, b_n) die Nullstellen von $f(z)$. Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Habicht, Walter: Zur inhomogenen Eliminationstheorie. *Comment. math. Helvetici* **21**, 79—98 (1948).

Mit Hilfe von Überlegungen, wie sie im Falle homogener Formen z. B. in Bd. 2, Kap. 11 der „Modernen Algebra“ von van der Waarden benutzt werden, beweist Verf. in etwas anderer Formulierung den folgenden Satz: Zu einem System $f_i(x, w)$ ($i = 1, \dots, n$) von n allgemeinen (inhomogenen) Polynomen in x_1, \dots, x_n mit unbestimmten Koeffizienten w_1, \dots, w_w gibt es stets ein durch ein lineares Gleichungssystem

$$(1) \quad F_i(x, w) = \sum_{k=1}^n g_{ik}(x, w) \cdot f_k(x, w) \quad (k = 1, \dots, n)$$

verknüpftes äquivalentes System der speziellen Gestalt:

$$(2) \quad F_i(x, w) = c_i(w) \cdot x_i + \varphi_i(x_n, w) \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad F_n(x, w) = \varphi_n(x_n, w).$$

Dabei sind alle auftretenden Terme nicht nur in den x_i , sondern auch in den w_k Polynome, es sind die $\varphi_i(x_n, w)$ von x_1, \dots, x_{n-1} unabhängig, und es wird die Determinante $|g_{ik}(x, w)| = \Delta(w)$ des Gleichungssystems (1) ein Polynom in den w_k allein. — Spezialisiert man nun die w_k so zu Elementen a_k eines beliebigen Körpers \mathfrak{K} , daß $\Delta(a) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} c_k(a) \neq 0$ wird, so gilt in $\mathfrak{K}[x_1, \dots, x_n]$ die Idealgleichung $\mathfrak{a} = (f_1(x, a), \dots, f_n(x, a)) = (F_1(x, a), \dots, F_n(x, a))$, und man hat für jede Nullstelle $x_i = \xi_i$ des Ideals \mathfrak{a} die Funktionaldeterminantendarstellung

$$(3) \quad \Delta(a) \cdot \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}_{x_i = \xi_i} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}_{x_i = \xi_i} = \prod_{k=1}^{n-1} c_k(a) \cdot \frac{\partial \varphi_n(x_n, a)}{\partial x_n} \quad x_n = \xi_n.$$

Stellt im Spezialfall \mathfrak{K} einen geordneten Körper dar, so lassen sich aus Formel (3) weitere Sätze ableiten, die durch die Möglichkeit topologischer Anwendungen bemerkenswert sind und die in gewissem Sinne in den Rahmen der Ausdehnung des Sturmschen Theorems auf Polynome in mehreren Veränderlichen gehören. *Krull*.

Habicht, Walter: Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens. *Comment. math. Helvetici* **21**, 99—116 (1948).

Es seien $f_n(x, w)$ und $f_{n-1}(x, w)$ Polynome n -ten bzw. $(n-1)$ -ten Grades in x mit unbestimmten Koeffizienten w_0, w_1, \dots, w_{2n} . Die den Gleichungen

$$(1) \quad p_i(x, w) \cdot f_n(x, w) + q_i(x, w) \cdot f_{n-1}(x, w) = f_i(x, w) \quad (i = n-1, n-2, \dots, 0)$$

genügenden ganzzahligen, primitiven Polynome p_i, q_i, f_i in x und den w_k seien, abgesehen von einer zweckmäßigen Vereinbarung über das Vorzeichen, eindeutig festgelegt durch die Forderungen, daß sie keinen nichttrivialen gemeinsamen Teiler und die Grade $n-i-1, n-i, i$ in x besitzen sollen. a_0, a_1, \dots, a_{2n} seien reelle Zahlen derart, daß mindestens eines der beiden Polynome $f_n(x, a)$ bzw. $f_{n-1}(x, a)$ den genauen Grad n bzw. $n-1$ besitzt; für eine beliebige reelle Zahl c bedeute $w(c)$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $f_i(c, a)$ ($i = n, n-1, \dots, 0$). Schließlich werde für eine reelle Nullstelle ϱ von $f_n(x, a)$, die nicht gleichzeitig auch Nullstellen von $f_{n-1}(x, a)$ ist,

$$(2) \quad j_\varrho = -\frac{1}{2} \cdot \text{sign}(f_n(\varrho, a + \varepsilon) - f_n(\varrho, a - \varepsilon)) \quad (\varepsilon > 0, \text{ hinreichend klein})$$

gesetzt. — Dann gilt der Satz: Sind c_1 und $c_2 > c_1$ reelle Zahlen mit $f_n(c_1, a) \cdot f_n(c_2, a) \neq 0$ und besitzen $f_n(x, a)$ und $f_{n-1}(x, a)$ in $c_1 < x < c_2$ keine gemeinsame Nullstelle, so wird

$$(3) \quad w(c_2) - w(c_1) = \sum j_\varrho \cdot \text{sign}(f_{n-1}(\varrho, a)),$$

wobei in (3) die Summe über alle zwischen c_1 und c_2 fallenden Nullstellen von $f_n(x, a)$ zu erstrecken ist. Der Beweis, der auch dann noch gilt, wenn a_k, c, ϱ Elemente eines beliebigen, im Artin-Schreierschen Sinne reell abgeschlossenen Körpers sind, stützt sich auf elementare eliminationstheoretische Überlegungen. (Man beachte, daß (1) für $i=0$ eine bekannte Definition der Sylvesterschen Resultante von f_n und f_{n-1} liefert.)

Für $f_{n-1}(x, a) = \frac{d}{dx}(f_n(x, a))$ wird nach (3) $w(c_1) - w(c_2)$ gleich der Anzahl der reellen Nullstellen zwischen c_1 und c_2 . Die Kette der $f_i(x, a)$ ($i = n, \dots, 0$) ist also eine verallgemeinerte Sturmsche Kette. Ihre Eigenart und ihr Vorzug vom algebraischen Standpunkt liegt darin, daß die zu einem beliebigen „speziellen“ Polynompaar $f_n(x, a)$, $f_{n-1}(x, a)$ gehörige Kette aus der dem „allgemeinen“ Polynompaar $f_n(x, w)$, $f_{n-1}(x, w)$ durch (1) zugeordneten Kette $f_i(x, w)$ ($i = n, n-1, \dots, 0$) durch einfache Koeffizientenspezialisierung entsteht. (Dagegen findet sich die nur der Werte $\pm 1, 0$ fähige Funktion j_q bereits in der Literatur.) Krull (Bonn).

Bruins, E. M.: On the comitants of binary quadratic and cubic forms. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 184—190 (1948).

Nachdem 1936 von C. A. Spierenburg [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 39, 528—531 und Dissertation, Amsterdam; dies. Zbl. 13, 385] ein volles System von Comitanten einer kubischen und zweier quadratischer Form angegeben wurde, wird hier ein volles Comitantensystem zweier kubischer und einer quadratischen Form bestimmt, und zwar so, daß die Transvektanten von m_x^2 und zwei kubischen Formen berechnet werden. Das gefundene System, von dem bewiesen wird, daß es ein kleinstes vollständiges System darstellt, umfaßt 68 Formen: 1 biquadratische, 8 kubische, 12 quadratische, 20 lineare Formen und 27 Invarianten. Krull (Bonn).

Gruppentheorie:

Krasner, H. et J. Kuntzmann: Remarques sur les hypergroupes. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 525—527 (1947).

Es werden einige unerhebliche Irrtümer in der Arbeit von M. Krasner [Duke math. J. 6, 120—140 (1940); dies. Zbl. 27, 9] korrigiert. Lorenzen (Bonn).

Miller, G. A.: Abstract group generated by the quaternion units. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 235—236 (1947).

Verf. weist darauf hin, daß W. R. Hamilton im Jahre 1843, also bereits 10 Jahre vor Cayley, eine Gruppe abstrakt, durch Beziehungen zwischen ihren Erzeugenden, definiert hat. Allgemein galt bisher Cayley als der erste, der diese Art, Gruppen zu definieren, gefunden hat. Grün (Berlin).

Fumi, F.: Sugli operatori matriciali di simmetria macroscopica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 101—109 (1947).

Fumi, F.: Assi di simmetria composta e operatori matriciali di rotazione impropria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 109—114 (1947).

Fumi, F.: Rappresentazione analitica del reticoli cristallini di traslazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 370—375 (1947).

Fumi, F.: Celle elementari di Bravais e traslazioni primitive di Seitz. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 376—380 (1947).

Im Anschluß an die Arbeiten von F. Seitz [Z. Kristallogr., Mineral. Petrogr. Abt. A 88, 433—459 (1934); 90, 289—313 (1935); dies. Zbl. 9, 384; 11, 233] werden die eigentlichen und die uneigentlichen makroskopischen Symmetrien der Kristallographie in Matrizen angegeben und die zugehörigen gruppentheoretischen Sätze angegeben. Anschließend werden die Bravais-Gitter und die Translationen behandelt. J. J. Burckhardt.

Dynkin, E. B.: Berechnung der Koeffizienten in der Campbell-Hausdorffschen Formel. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 57, 323—326 (1947) [Russisch].

e^x und $\log z$ seien durch formale Potenzreihen definiert. Bildet man die formale Reihe für

$$\Phi(x, y) = \log(e^x e^y) = \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{p_1! q_1! \dots p_k! q_k!} x^{p_1} y^{q_1} \dots x^{p_k} y^{q_k}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x, y),$$

wobei mit x, y nicht-kommutativ gerechnet wird, in der ersten Summe über alle Systeme von nicht-negativen Zahlen $(p_1, q_1; \dots; p_k, q_k)$ summiert wird und die Glieder mit $p_1 + q_1 + \dots + p_k + q_k = m$ zu dem homogenen Polynom $P_m(x, y)$ zusammengefaßt werden, so kann man — das besagt der Campbell-Hausdorffsche Satz [vgl. J. E. Campbell, *Introductory treatise on Lie theory of finite continuous transformation groups*. Oxford, 1903. F. Hausdorff, *Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl.* 58, 19—48 (1906)] — $P_m(x, y)$ durch x und y mittels Addition, Multiplikation mit rationalen Zahlen und Kommutatorbildung ausdrücken. Verf. gelangt zu dem (bisher unbekannten) expliziten Ausdruck für $P_m(x, y)$, indem er den folgenden Satz beweist: K sei ein Körper der Charakteristik 0, \mathfrak{R} ein nicht-kommutativer Polynomring über K , der durch Adjunktion von miteinander nicht vertauschbaren Unbestimmten x_1, x_2, \dots entsteht, und \mathfrak{R}^0 das kleinste Teilsystem von \mathfrak{R} , das 1. x_1, x_2, \dots enthält und 2. zugleich mit zwei Polynomen P, Q auch deren lineare Verbindungen $\lambda P + \mu Q$ ($\lambda, \mu \in K$) und Kommutator $P \circ Q = PQ - QP$ enthält. Ist dann $P \rightarrow P^0$ die lineare Abbildung von \mathfrak{R} auf \mathfrak{R}^0 , die definiert wird durch

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k})^0 = \frac{1}{k} x_{i_1} \circ x_{i_2} \circ \dots \circ x_{i_k}$$

[die i_k nehmen unabhängig voneinander die Werte 1, 2, \dots an, und $x_{i_1} \circ x_{i_2} \circ \dots \circ x_{i_k} = (\dots ((x_{i_1} \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}) \circ \dots \circ x_{i_k})$], so gehört das Polynom $P \in \mathfrak{R}$ dann und nur dann zu \mathfrak{R}^0 , wenn $P^0 = P$. — Daraus folgt für den Campbell-Hausdorffschen Satz:

$$\Phi(x, y) = \Phi^0(x, y) = \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{p_1! q_1! \dots p_k! q_k!} (x^{p_1} y^{q_1} \dots x^{p_k} y^{q_k})^0$$

— Anwendungen auf die Konstruktion Liescher Gruppen zu Lieschen Algebren.
Pannwitz (Berlin).

Verbände. Ringe. Körper:

Rignet, Jacques: *Produit tensoriel de lattices*. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 40—41 (1948).

Die Arbeit beschränkt sich auf die Definition eines „Tensorproduktes“ von Verbänden. Es werden aus den Paaren (x_1, x_2) ($x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, L_1, L_2$ beliebige Verbände) alle durch die Operationen \wedge, \vee entstehenden Ausdrücke formal gebildet. Zwischen diesen „Polynomen“ wird eine Äquivalenzrelation definiert durch Forderung der assoziativen, kommutativen und idempotenten Gesetze für \wedge und \vee , beider Distributivgesetze, der Identität $a = a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b)$ und der Identitäten $(x_1, x'_1) \wedge (x_1, x'_2) = (x_1, x'_1 \wedge x'_2)$ (entsprechend nach Vertauschung von 1, 2 oder \wedge, \vee).

Lorenzen (Bonn).

Samuel, Pierre: *Sur les anneaux locaux*. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1244—1245 (1947).

Es handelt sich um die angekündigte Ergänzung einer früheren Note (dies. Zbl. 29, 106). Die Tragweite der über den von Chevalley bereits erreichten Standpunkt hinaus in der Theorie der Stellenringe gemachten Fortschritte dürfte sich erst dann genauer übersehen lassen, wenn die in Aussicht genommene ausführliche Darstellung erschienen ist.

Krull (Bonn).

Loonstra, F.: *Les systèmes hypercomplexes non commutatifs de deuxième ordre*. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 220—223 (1948).

Sind a, b beliebige Elemente aus irgendeinem Körper \mathfrak{K} , so erhält man ein hyperkomplexes System \mathfrak{S} über \mathfrak{K} mit zwei Basiselementen e_1, e_2 , wenn man die Multiplikation in \mathfrak{S} durch die Vorschrift: $e_1^2 = a \cdot e_1, e_1 \cdot e_2 = a \cdot e_2, e_2 \cdot e_1 = b \cdot e_1, e_2^2 = b \cdot e_2$ festlegt. Jedes hyperkomplexe System über \mathfrak{K} vom Range 2 ist zu einem System \mathfrak{S} isomorph oder antiisomorph. In \mathfrak{S} existieren i. a. unendlich viele Linkseinheiten, aber keine Rechtseinheit. Die Menge aller Linksnulleiler bildet in \mathfrak{S} ein zweiseitiges maximales Primideal \mathfrak{n} . Der Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{n}$ ist zu \mathfrak{K} isomorph.

Krull (Bonn).

Lombardo-Radice, L.: Sugli elementi eccezionali dell' algebra legata a un gruppo di ordine finito in un corpo a caratteristica p . Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 170—174 (1947).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 23, 103) untersucht Verf. in der Algebra \mathfrak{A} einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} in einem Körper k , dessen Charakteristik p ein Teiler der Ordnung n von \mathfrak{G} sei, die „ausgezeichneten Elemente“, das sind die Elemente des Radikals. g_1, \dots, g_n seien die Elemente von \mathfrak{G} . Damit $A = \sum \varrho_v g_v$ ausgezeichnet sei, ist notwendig, daß die Summe aller ϱ_v Null ist, g_v die Rechtsrestklassen aller p -Sylowgruppen von \mathfrak{G} durchläuft, in denen ein festes g aus \mathfrak{G} enthalten ist, dies für alle g von \mathfrak{G} und entsprechend für Linksrestklassen. Hinreichend ist, daß die Summe aller ϱ_v Null ist, wo g_v eine Rechtsrestklasse einer festen p -Sylowgruppe von \mathfrak{G} durchläuft, dies für alle Rechtsrestklassen und ebenso für alle Linksrestklassen einer festen Sylowgruppe. An der Ikosaedergruppe wird gezeigt, daß beide Bedingungen im allgemeinen nicht identisch sind. *Deuring*.

Lombardo-Radice, L.: Il difetto di regolarità di un gruppo finito rispetto a un divisore primo del suo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 766—767 (1947).

\mathfrak{G} sei eine Gruppe der Ordnung n , p ein Primfaktor von n . Es werde die Algebra \mathfrak{A} von \mathfrak{G} im Primkörper Γ_p der Charakteristik p betrachtet. Wenn es h_p Klassen konjugierter Elemente mit durch p teilbarer Ordnung gibt, so hat das Radikal des Zentrums \mathfrak{Z} von \mathfrak{A} mindestens den Rang h_p , jedoch kann der Rang e_p von \mathfrak{Z} größer als h_p sein, $\delta_p = e_p - h_p$ heiße Regularitätsdefekt von \mathfrak{G} für p . Er ist auch gleich dem Überschuß der Anzahl der einfachen Linksideale der auf die algebraisch abgeschlossene Hülle Ω von Γ_p erweiterten Algebra \mathfrak{A}_Ω über die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} in Ω . *Deuring* (Hamburg).

Geymonat, Ludovico: Un teorema per le aritmetiche generalizzate. Atti Accad. Sci. Torino Cl. I 81/82, 59—62 (1948).

Geymonat, Ludovico: Ancora su di un teorema per le aritmetiche generalizzate. Atti Accad. Sci. Torino Cl. I 81/82, 63—66 (1948).

Es sei J ein Integritätsbereich, für dessen Elemente $a \neq 0$ eine multiplikative Normfunktion $N(a)$ mit natürlichen Zahlwerten erklärt ist. Wenn dann für je zwei Elemente $a, b \neq 0$ aus J die „Division mit Rest“ $a = qb + r$, $N(r) < N(b)$ eine Lösung q, r in J hat, so gilt bekanntlich in J der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primelemente; siehe etwa die Arbeit des Ref.: Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen; J. reine angew. Math. 159, 3—12 (1928). Verf. beweist erneut diesen Satz, indem er seine formale Umkehrung formuliert und demgemäß durch ein einfaches Rekursionsverfahren aus der Existenz eines $c \neq 0$ in J mit zwei wesentlich verschiedenen Primzerlegungen auf die Existenz eines Paares $a, b \neq 0$ in J ohne „Division mit Rest“ schließt.

Hasse (Berlin).

Rédei, L. and T. Szele: Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. I. Acta math., Uppsala 79, 291—320 (1947).

Ein Polynom $f(x)$ mit rationalen Koeffizienten möge für beliebiges ganzzahliges m modulo m zulässig heißen, wenn $f(a)$ für jede ganze Zahl a ganzzahlig ist und wenn aus $a_1 \equiv a_2 (m)$ stets $f(a_1) \equiv f(a_2) (m)$ folgt, wenn also $f(x)$ jeder Restklasse \bar{a} modulo m eindeutig eine bestimmte Restklasse $f(\bar{a})$ zuordnet. Bekanntlich ist $f(x)$ dann und nur dann modulo 0 zulässig (also $f(a)$ ganz für jedes ganze a), wenn $f(x)$ in der Form $a_0 \cdot \binom{x}{n} + a_1 \cdot \binom{x}{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \binom{x}{1} + a_n$ mit ganzzahligen a_i darstellbar ist. Für einen Modul $m \neq 0$ beweisen Verf.: Sind p_1, \dots, p_r verschiedene Primzahlen, so ist $f(x)$ dann und nur dann modulo $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$ zulässig, wenn $f(x)$ für $i = 1, 2, \dots, r$ modulo $p_i^{k_i}$ zulässig ist. Für eine Primzahl-

potenz $m = p^r$ kann stets rational mit endlich vielen Schritten entschieden werden, ob $f(x)$ modulo p^r zulässig ist oder nicht. Jede Funktion im Restklassenring \mathfrak{R}_{p^r} von \mathfrak{R}_0 modulo p^r (\mathfrak{R}_0 Ring der ganzen Zahlen), d. h. jede eindeutige Abbildung \mathfrak{A} von \mathfrak{R}_{p^r} auf eine Untermenge, kann durch ein zulässiges Polynom $f(x)$ dargestellt werden, d. h. es gibt stets ein modulo p^r zulässiges Polynom $f(x)$, derart, daß die Restklassenzuordnung $\bar{a} \rightarrow f(\bar{a})$ gerade die Abbildung \mathfrak{A} definiert. — Der Beweis der auf den Fall $m = p^r$ bezüglichen Sätze wird so geführt, daß zunächst entsprechend den m^m in \mathfrak{R}_{p^r} möglichen Funktionen ein System von m^m durch minimale Gradzahlen und minimale Nenner ausgezeichneten, zulässigen Polynomen $\psi_k(x)$ konstruiert wird, derart, daß keine zwei verschiedene $\psi_k(x)$ dieselbe Funktion in \mathfrak{R}_{p^r} darstellen. Anschließend wird gezeigt, daß zu jedem rationalzahligen Polynom $f(x)$ rational mit endlich vielen Schritten ein Restpolynom $f_0(x)$ berechnet werden kann mit der Eigenschaft, daß $f(x)$ dann und nur dann zulässig ist, wenn $f_0(x)$ der Reihe der $\psi_k(x)$ angehört. Für diesen Reduktionsprozeß sowie für die Konstruktion der $\psi_k(x)$ ist von grundlegender Bedeutung die durch die Gleichungen $\Phi_0(x) = x$, $\Phi_{k+1}(x) = p^{-1} \cdot ((\Phi_k(x))^p - \Phi_k(x))$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) schrittweise definierte Polynomfolge $\Phi_k(x)$. — Von den Nebenresultaten sei die überraschende Bemerkung hervorgehoben: Sind $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ beliebig viele ganze positive Zahlen, so gibt es stets mindestens ein rationalzahliges Polynom $f(x)$, das modulo $p^{i_1}, p^{i_2}, \dots, p^{i_n}$ zulässig bzw. nicht zulässig, modulo aller übrigen p -Potenzen dagegen nicht zulässig bzw. zulässig ist. Die Untersuchungen sollen fortgesetzt werden. Insbesondere ist der Beweis des Satzes angekündigt, daß, falls $m \neq 0$ mindestens 2 verschiedene Primteiler besitzt, kein Ring oder Körper \mathfrak{S} existiert, derart daß alle Funktionen im Restklassenring \mathfrak{R}_m durch zulässige Polynome mit Koeffizienten aus \mathfrak{S} dargestellt werden können. *Krull (Bonn).*

Kaplansky, Irving: Semi-automorphisms of rings. *Duke math. J.* **14**, 521—525 (1947).

G. Ancochea nannte einen additiven Automorphismus $a \rightarrow a'$ einen (Ring-) Semiautomorphismus, wenn er hinsichtlich der Multiplikation der Bedingung

$$(1) \quad (a \cdot b)' + (b \cdot a)' = a' \cdot b' + b' \cdot a'$$

genügt, und bewies (dies. Zbl. **29**, 107) den Satz, daß bei jeder einfachen Algebra mit von 2 verschiedener Charakteristik jeder Semiautomorphismus entweder ein Automorphismus oder ein Antiautomorphismus ist. Verf. ersetzt Bedingung (1) durch

$$(2) \quad (a \cdot b \cdot a)' = a' \cdot b' \cdot a'$$

mit der Zusatzbedingung $1' = 1$ für jeden Ring mit Einheitsselement und beweist für den so abgeänderten Semiautomorphismusbegriff für jede Charakteristik die Sätze: Bei jedem halbeinfachen Ring erzeugt jeder Semiautomorphismus einen Automorphismus des Zentrums. Bei jeder einfachen Algebra (von endlicher Ordnung) ist jeder Semiautomorphismus entweder ein Automorphismus oder ein Antiautomorphismus. Bei jeder direkten Summe einfacher Algebren definiert jeder Semiautomorphismus für jede einzelne einfache direkte Komponente entweder einen Automorphismus oder einen Antiautomorphismus. *Krull (Bonn).*

Andrunakievič, V. A.: Halbradikale Ringe. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **12**, 129—178 (1948) [Russisch].

Neben der Addition wird hier für einen Ring $a \circ b = a + b - ab$ als zweite Grundoperation eingeführt. Mittels dieser Operation wird ein Ring \mathfrak{A} durch folgende Axiome definiert: 1. \mathfrak{A} ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. 2. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. 3. $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c - c$, $c \circ (a + b) = c \circ a + c \circ b - c$. Ein Element a heißt rechts halbradikal, wenn aus $x \circ a = x' \circ a$ folgt $x = x'$. Für die Multiplikation bedeutet das: Aus $x = xa$ folgt $x = 0$. Ein Element heißt rechts radikal, wenn es ein Element a_r gibt, so daß $a \circ a_r = 0$. Entsprechend heißt ein

Element radikal, wenn es Elemente a'_l und a'_r gibt mit $a'_l \circ a = 0$ und $a \circ a'_r = 0$. Es ist dann $a'_l = a'_r$. — Zu jedem Element $a \in \mathfrak{A}$ wird ferner eine Abbildung $x \bar{a}_r = x - xa$ für alle $x \in \mathfrak{A}$ definiert. Es zeigt sich, daß \mathfrak{A} dann und nur dann links radikal ist, wenn $\mathfrak{A} \bar{a}_r = \mathfrak{A}$. Gilt für die Linksideale $\mathfrak{A} \bar{c}_r$ die Minimalbedingung, so folgt $b \circ a = 0$ aus $a \circ b = 0$. Unter der gleichen Bedingung ist jedes Element dann und nur dann radikal, wenn es rechts halbradikal ist. — Ein Ring wird radikal genannt, wenn jedes seiner Elemente rechts radikal ist. Jedes Element ist dann auch links radikal. Entsprechend werden rechts, links und schlechthin (zweiseitig) halbradikale Ringe definiert. Ein Ring ist dann und nur dann radikal, wenn er rechts halbradikal ist und wenn für die Ideale $\mathfrak{A} \bar{a}_r$ die Minimalbedingung gilt. Ein rechts halbradikaler Ring \mathfrak{A} mit Minimalbedingung für die Ideale $a \mathfrak{A}$ enthält nur nilpotente Elemente. Ist \mathfrak{A} rechts halbradikal und gilt die Minimalbedingung für Rechtsideale, so ist \mathfrak{A} nilpotent. Es wird ferner untersucht, unter welchen Bedingungen sich ein halbradikaler Ring in einen radikalen einbetten läßt. — Auch in bezug auf die Operation \circ lassen sich Ideale definieren, die mit den homomorphen Abbildungen in ähnlicher Weise zusammenhängen wie die üblichen Ideale, nur hat man hier die Gesamtheit der auf das Einselement abgebildeten Elemente zu betrachten. Die Arbeit schließt mit der Untersuchung der Teilbarkeit solcher Ideale und der Faktorzerlegung bezüglich \circ in kommutativen Ringen, in denen jedes derartige Ideal Hauptideal ist. Die Faktorzerlegung ist im wesentlichen eindeutig bis auf radikale Faktoren.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Bernstein, B. A.: Weak definitions of field. Duke math. J. 14, 475—482 (1947).

Die übliche Definition der (additiv geschriebenen) abelschen Gruppe besteht aus den Postulaten (A_1) additive Abgeschlossenheit, (A_2) Assoziativität, (A_3) Existenz eines Rechtsnullelements, (A_4) Existenz eines Rechtsinversen, (A_5) Kommutativität. Verf. zeigt: A_2 und A_5 können ersetzt werden durch (A'_2) $(a + b) + c = (b + c) + a$. Damit erste Umformung der Körperdefinition: Menge F mit zwei als Addition und Multiplikation bezeichneten binären Operationen und den Postulaten A_1, A'_2, A_3, A_4 , den entsprechenden M_1, M'_2, M_3, M_4 für die Multiplikation (dabei 1 in M_3 als Rechtseinselement, a' in M_4 als Rechtsinverses für $a \neq 0$), $(D') a(1 + b) = a + ab$, $(N) F$ enthält mindestens zwei verschiedene Elemente. Zweite Umformung: An Stelle der Addition tritt eine unäre Operation a^* (vom Verf. bereits mit $1 + a$ bezeichnet); die benötigten Postulate sind $N, M_1, M'_2, M_3, (M_6)$ Existenz eines Elementes 0 in F mit $0a = 0$, $M_4, (A'_1) a^*$ in F für a aus F , $(A''_2) a(a' b^*)^* = b(b' a^*)^*$ (für $a \neq 0, b \neq 0$), $(A'_3) 0^* = 1$, (A'_4) Existenz von x in F mit $x^* = 0$, $(A'_5) a(a')^* = a^*$ (für $a \neq 0$). Übergang zur üblichen Form durch die Definition $a + b = a(a' b)^*$ (für $a \neq 0$), $0 + b = b$. Verf. zeigt, daß in jedem der beiden Postulatensysteme jedes Postulat von den übrigen unabhängig ist.

Günter Pickert (Tübingen).

Funktionenkörper:

Nagell, Trygve: Les points exceptionnels sur les cubiques planes du premier genre. II. Nova Acta Soc. Sci. Upsalensis, IV. s. 14, Nr. 3, 40 S. (1947).

Das Referat schließt den früher erschienenen Teil I der Arbeit (ibid. Nr. 1) ein. — In dieser an arithmetischen Ergebnissen reichen Untersuchung betrachtet Verf. ebene kubische Kurven C vom Geschlecht 1, gegeben durch homogene ternäre kubische Gleichungen $F(X, Y, Z) = 0$ mit komplexen Zahlkoeffizienten. Ist Ω ein diese Koeffizienten enthaltender Körper (Teilkörper des komplexen Zahlkörpers), so entspricht C ein elliptischer Funktionenkörper $K = \Omega(X:Y:Z)$ und darin eine Divisorenklasse K vom Grade 3, gegeben durch die reduzierte Divisorenbruchdarstellung $X:Y:Z \cong \mathfrak{A}:\mathfrak{B}:\mathfrak{C}$. Umgekehrt entspricht bei einem gegebenen algebraischen Funktionenkörper K/Ω vom Geschlecht 1 jeder Divisorenklasse K vom Grade 3 eine kubische Kurve C , gegeben durch die wegen $\dim K^3 = 9$ einzige lineare Relation zwischen den 10 Potenzprodukten dritten Grades dreier linear-unabhängiger ganzer Divisoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ aus K . Die in Ω rationalen Punkte von C entsprechen dabei umkehrbar eindeutig den Primdivisoren ersten Grades von K/Ω , so daß zwischen diesen beiden Begriffsbildungen (deren letztere birational invariant formuliert ist) nicht unterschieden zu werden braucht. Für die zu behandelnde Frage-

stellung kann ohne Einschränkung vorausgesetzt werden, daß C mindestens einen rationalen Punkt o hat. Dann erhält man die zu C birational-äquivalente Weierstraßsche Normalform W mit dem Bezugspunkt o , nämlich die Erzeugung $K = \Omega(x, y)$ mit $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, wo x, y die Nenner o^2, o^3 haben, durch Multiplikation der (in K selbst angenommenen) Erzeugenden $X \cong \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}, Y \cong \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}}, Z \cong \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{U}}$ mit dem Element $t \cong \frac{\mathfrak{U}t}{o^4}$ (wo t der durch die Äquivalenz $\mathfrak{U}t \sim o^4$

bestimmte in Ω rationale Punkt von C ist) in der Form $tX = \varphi(x, y), tY = \psi(x, y), tZ = \chi(x, y)$ mit quadratischen Polynomen φ, χ, ψ über Ω . Daß diese Polynome φ, χ, ψ sogar linear ausfallen, ist gleichbedeutend damit, daß $t = o$, also $\mathfrak{U} \sim o^3$ ist, d. h. daß einer der neun Wendepunkte u von C , gekennzeichnet durch $\mathfrak{U} \sim u^3$, die im allgemeinen über Ω algebraisch vom Grade 3 sind, in Ω rational ist und dementsprechend als Bezugspunkt o genommen werden kann. Eine

auf o bezogene Relation $\frac{p_1 p_2 p_3}{o_3} \sim 1$ (Sekantenverfahren für W) sei in der additiven Form

$p_1 + p_2 + p_3 = 0$ (o) geschrieben (Additionsgruppe A der Punkte von W , speziell Untergruppe A_0 der in Ω rationalen Punkte von W). Eine auf irgendeinen Wendepunkt u von C bezogene

Relation $\frac{p_1 p_2 p_3}{u^3} \sim 1$ oder also $p_1 + p_2 + p_3 = 3u$ (o) (Sekantenverfahren für C) ist auf Grund

der Translation $p_i = p'_i + u$ (o) gleichbedeutend mit $p'_1 + p'_2 + p'_3 = 0$ (o). — Verf. setzt sich zum Ziel das Studium der in Ω rationalen Ausnahmepunkte von C ; es sind das diejenigen in Ω rationalen Punkte von $p = p_0$ von C , für welche die durch $2p_r + p_{r+1} = 3u$ (o) (Tangentenverfahren für C) bestimmte Punktfolge p_r nur endlich viele verschiedene Punkte enthält. Die sämtlichen Ausnahmepunkte p von C (in Ω rational oder nicht) entsprechen durch die Translation $p = p' + u$ (o) umkehrbar eindeutig den sämtlichen Ausnahmepunkten p' von W . Diese letzteren p' bilden, wie sofort zu sehen, einfach die Untergruppe G der Elemente von endlicher Ordnung aus A ; die ersteren p bilden demnach die Nebengruppe $u + G$. Besitzt C überhaupt einen in Ω rationalen Ausnahmepunkt a , so kann jene Nebengruppe auch als $a + G$ geschrieben werden, und die Gesamtheit aller in Ω rationalen Ausnahmepunkte p von C ist dann die Nebengruppe $a + G_0$, wo $G_0 = A_0 \cap G$ die Untergruppe der in Ω rationalen Elemente von endlicher Ordnung aus A_0 (rationalen Ausnahmepunkte q von W) ist. Damit ist die Aufgabe auf das Studium dieser Gruppe G_0 zurückgeführt. Ist G_0 von endlicher Ordnung n , so besteht G_0 aus den in Ω rationalen Lösungen von $nq = 0$ (o), also aus den in Ω rationalen unter den sogen. n -ten Teilpunkten von W (zum Bezugspunkt o). — Von zahlreichen Einzelergebnissen des Verf. zu dieser Frage können hier nur die wichtigsten mitgeteilt werden. Ist eine obere Schranke N für die Ordnung n bekannt, so lassen sich die Koordinaten der Punkte aus G_0 durch Bestimmung aller in Ω liegenden Wurzeln von N angebbaren algebraischen Gleichungen über Ω gewinnen. Eine solche Schranke N ergibt sich im Spezialfall des rationalen Zahlkörpers $\Omega = P$ aus einem früheren Resultat des Verf. (dies. Zbl. 11, 147). Legt man nämlich die Normalform W in der modifizierten Gestalt

$$(1) \quad y^2 = x^3 - Ax - B \text{ mit } D = 4A^3 - 27B^2 \neq 0$$

zugrunde, wobei man in P ohne Einschränkung A, B ganz und biquadratfrei bzw. bikubusfrei normieren darf, so sind die Koordinaten $x = a, y = b$ der von o verschiedenen Punkte aus G_0 ganz, und es ist $b^2 | D$ (soweit $b \neq 0$). Dieses Ergebnis ist übrigens inzwischen von Billing (dies. Zbl. 16, 200) auf quadratische und kubische Zahlkörper Ω verallgemeinert worden, überträgt sich jedoch, wie Verf. jetzt durch ein Gegenbeispiel zeigt, nicht auf jeden algebraischen Zahlkörper Ω . Nach Hervorhebung der Folgerungen aus dem angegebenen Resultat im harmonischen Fall $B = 0$ und im äquianharmonischen Fall $A = 0$ beweist Verf., daß für $\Omega = P$ im Falle quadratfreier Diskriminante D die Ordnung $n \leq 2$ ist, von dem Sonderfall $A = 2, B = -1$ mit $n = 4$ abgesehen. Er kündigt ferner das gleiche Ergebnis $n \leq 2$ (mit etwas mehr Sonderfällen) auch für $D = p^2 D_0$ (p Primzahl, D_0 quadratfrei) als kürzlich durch A. Näsander bewiesen an. — Wieder für beliebigen Grundkörper Ω leitet Verf. ganzrationale homogene Parameterdarstellungen für die Invarianten A, B in (1) unter der Voraussetzung her, daß G_0 eine Untergruppe einer der Ordnungen 3, 4, 5, 6, 7 besitzt, und stellt zusammen, was man bisher über die vorkommenden Ordnungen n weiß: $n = 1, 2, 3, 4$ (zyklisch und bityklisch), 5, 6, 7, 8 (zyklisch und nicht-zyklisch), 9, 10, 12, 16 (nur nicht-zyklisch) sind als vorkommend bekannt; n kann nicht durch 11, 14, 20, 24, 32 teilbar sein, und, wenn G_0 zyklisch, auch nicht durch 16. Verf. vermutet, daß n auch nicht durch 15, 18, 21, 25, 27, 35 teilbar sein kann. — Es folgen sodann ausgedehnte Untersuchungen über die Erweiterung der Gruppe G_0 zu \bar{G}_0 , die einer oder mehreren simultanen quadratischen Erweiterungen von Ω zu $\bar{\Omega}$ entspricht. Im Falle einer quadratischen Erweiterung $\bar{\Omega} = \Omega(\sqrt{A})$ wird neben (1) die Normalform

$$(1') \quad y^2 = x^3 - A^2 Ax - A^3 B$$

betrachtet. Sind die zugehörigen Gruppen G_0, G'_0 endlich, so sind auch die Erweiterungen \bar{G}_0, \bar{G}'_0 endlich, und es ist $\bar{G}_0 \cong \bar{G}'_0$. Für die Ordnungen n, n' und $\bar{n} = \bar{n}'$ gilt dabei folgendes: Ist n ungerade, so ist $\bar{n} = n n'$. Ist n gerade und enthält G_0 nur zwei 2-te Teilpunkte, so ist

$\bar{n} = n n'$ oder $\frac{1}{2} n n'$. Ist n gerade und enthält G_0 alle vier 2-ten Teilpunkte, so ist $\bar{n} = n n'$ oder $\frac{1}{2} n n'$ oder $\frac{1}{4} n n'$. Sind speziell $\Omega, \bar{\Omega}$ reell, so ist $(n, n')|4$. Für $\Omega = P$ werden die Punkte aus \bar{G}_0 in den folgenden Fällen ausführlich angegeben:

- a) $B = 0, \Omega = P(\sqrt{\Delta})$; es ist $\bar{n}|4$.
- b) $A = 0, \Omega = P(\sqrt[3]{\Delta})$; es ist $\bar{n}|6$.
- c) $A = 0, B \neq B_0^3, 2 B_0^3, \bar{\Omega} = P(\sqrt[3]{\Delta_1}, \dots, \sqrt[3]{\Delta_r})$ mit $\Delta_i > 0$; es ist $\bar{n} = 0$.
- d) $A = 0, B = -B_1^3$ mit $B_1 \neq B_0^3, 4 B_0^3, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i < 0$; es ist $\bar{n} = 3$.
- e) $A = 0, B = -B_1^3$ mit $B_1 \neq B_0^3, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i > 0$ prim zu B ; es ist $\bar{n} = 2$.
- f) $A = 0, B = -1, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i > 0$; es ist $\bar{n} = 6$.
- g) $B = 0, A \neq \pm A_0^3, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i > 0$ prim zu A ; es ist $\bar{n} = 2$.
- h) $B = 0, A = -4 A_0^3$ mit $A_0 \neq A_1^3, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i > 0$ prim zu A ; es ist $\bar{n} = 2$.
- i) $B = 0, A = -4, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i > 0$; es ist $\bar{n} = 4$.
- k) $B = 0, A = A_0^3, \bar{\Omega}$ wie oben mit $\Delta_i > 0$ prim zu 2; es ist $\bar{n} = 4$.

Für $\Omega = P, \bar{\Omega} = P(\sqrt[3]{\Delta})$ und quadratfreie Diskriminante D ist $\bar{n} = n$ außer in folgenden drei Fällen:

1. $n = 2$; dann ist $\bar{n} = 4$.
2. $n = 2, a$ rationale Wurzel von $x^3 - Ax - B$ und $A = 3a^2 - 1, B = a - 2a^3, a \neq 1, \Delta = 3a \pm 2$; dann ist $\bar{n} = 4$.
3. $A = 2, B = -1, \Delta = 5$; dann ist $n = 4$ (s. o.), $\bar{n} = 8$.

Zum Schluß beschäftigt sich Verf. mit den Hurwitzschen kubischen Kurven

$$(C) \quad aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dXYZ = 0,$$

wo a, b, c, d ganzrational und abc quadratfrei. Für die Anzahl m der in P rationalen Ausnahmepunkte gilt hier:

- $m = 0$ für $|a b|, |a c|, |b c| > 1$,
- $m = 1$ für $|a| = |b| = 1, |c| > 1$ (außer für $d = -c \pm 2, -4c \pm 1$),
- $m = 2$ im letzteren Falle,
- $m = 3$ für $|a| = |b| = |c| = 1$ (außer für $d = 1, -5$),
- $m = 0 \bmod 6$ im letzteren Falle.

Sind allgemeiner $|a b|, |a c|, |b c| > 1$, so hat C in keinem algebraischen Zahlkörper Ω von durch 3 unteilbarem Grad rationale Ausnahmepunkte. Sind $a, b, c \neq 0$, aber $d = 0$, und besitzt C einen in Ω rationalen Punkt, so ist C birational zur Normalform

$$(W) \quad y^2 = 4x^3 - 27a^2 b^2 c^2$$

äquivalent. Solche Kurven C liefern Beispiele, wo C keinen in Ω rationalen Punkt, W dagegen n in Ω rationale Punkte hat; es wird als möglich erwiesen:

$$m = 0, n = 1 \text{ in } P, \quad m = 0, n = 3 \text{ in } P(\sqrt{-3}), \\ m = 0, n = 2 \text{ in } P(\sqrt{-7}), \quad m = 0, n = \infty \text{ in geeigneten unendlichen } \Omega.$$

Schließlich sei noch folgendes allgemeine Ergebnis hervorgehoben: Wenn eine kubische Kurve C keinen in Ω rationalen Ausnahmepunkt besitzt, so gilt dasselbe in jeder endlich-algebraischen Erweiterung $\bar{\Omega}$ von durch 3 nicht teilbarem Relativgrad. Hasse (Berlin).

Zahlentheorie:

Bellman, Richard and Harold N. Shapiro: The algebraic independence of arithmetic functions. I. Multiplicative functions. Duke math. J. 15, 229—235 (1948).

Ein System von zahlentheoretischen Funktionen $f_1(n), \dots, f_N(n)$ heißt algebraisch unabhängig, wenn kein nicht identisch verschwindendes Polynom $P(x_1, \dots, x_N)$ mit reellen Koeffizienten existiert, so daß $P(f_1, \dots, f_N) = 0$ ist für alle natürlichen Zahlen n . Verff. untersuchen zuerst den Fall $N = 2$. $f(n)$ und $g(n)$ seien multiplikative zahlentheoretische Funktionen. Das System $[f, g]$ heißt singular, wenn sowohl $f(n)$ als auch $g(n)$ nur bei Einsetzung eines Argumentsystems p^x (p feste Primzahl) unendlich vieler verschiedener Werte fähig sind. Satz: Wenn $[f, g]$ nicht singular ist und mindestens eine der beiden Funktionen nicht nur endlich vieler Werte fähig ist, so sind f und g algebraisch unabhängig, es sei denn, daß $f \equiv g^r$ (r rational). Das Hauptresultat des allgemeinen Falles $N \geq 2$ lautet: $f_1(n), \dots, f_N(n)$ sei ein System von multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen. Wenn ein Polynom $P(x_1, \dots, x_N) \not\equiv 0$ für alle Argumentsysteme $(f_1(n), \dots, f_N(n))$, $n = 1, 2, \dots$, verschwindet, dann gibt es zu jeder Folge von

paarweise teilerfremden natürlichen Zahlen $\{n_i\}$ eine Teilfolge $\{n'_i\}$, für die eine Relation der Gestalt $f_1^{\alpha_1} \cdots f_N^{\alpha_N} = f_1^{\beta_1} \cdots f_N^{\beta_N}$ gilt: α_i, β_i sind nicht negative ganze Zahlen und für mindestens ein i ist $\alpha_i \neq \beta_i$. — Als Anwendung wird gezeigt, daß die Funktionen $n, q(n)$ (Eulersche Funktion), $\sigma(n)$ (Teilersumme von n), $d(n)$ (Teileranzahl von n) und $2^{v(n)}$ ($v(n)$ = Anzahl der verschiedenen Primteiler von n) algebraisch unabhängig sind. *H. L. Schmid* (Berlin).

Wade, L. I.: Algebraic independence of certain arithmetic functions. *Duke math. J.* **15**, 237 (1948).

Für den Satz der vorstehend besprochenen Arbeit, daß die Funktionen $n, \sigma(n), q(n), d(n), 2^{v(n)}$ algebraisch unabhängig sind, wird hier ein kurzer Beweis gegeben unter Benützung folgenden Lemmas: $f_1(n), \dots, f_k(n)$ seien k zahlentheoretische Funktionen. Wenn eine Folge $\{n_i\}$ existiert mit der Eigenschaft $f_\kappa(n_i) \rightarrow \infty$ für $n_i \rightarrow \infty$ ($\kappa = 1, \dots, k$) und, für jedes λ , $f_\kappa(n_i) f_{\kappa+1}^\lambda(n_i) \rightarrow \infty$ für $n_i \rightarrow \infty$, so sind f_1, \dots, f_k algebraisch unabhängig. *H. L. Schmid* (Berlin).

Beeger, N. G. W. II.: A problem of the theory of numbers and its history. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. s. **22**, 306—309 (1948).

Es handelt sich um den Satz, daß für eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod{16}$ dann und nur dann 2 achter Potenzrest mod. p ist, wenn p ganzzahlig in den Formen $p = a^2 + (16b)^2 = c^2 + 2(4d)^2$ darstellbar ist, sowie dann und nur dann sogar sechzehnter Potenzrest, wenn dabei $b \equiv d \pmod{2}$ ist. Dieser Satz wurde 1896 von Cunningham auf Grund numerischer Beispiele vermutet und 1911 von Bohmîček auf Grund Hilbertscher idealtheoretischer Arbeiten bewiesen. Es folgt auch — wenschon nicht ohne Mühe — aus der 1928 von Artin-Hasse bewiesenen ganz allgemeinen expliziten Formel zum zweiten Ergänzungssatz des Reziprozitätsgesetzes der Potenzreste von Primzahlpotenzexponenten. Neudrugs gab Aigner [*Deutsche Math.* **4**, 44—52 (1939); dies. Zbl. **20**, 291] einen recht einfachen klassenkörpertheoretischen Beweis. — Verf. ist mit diesen auf die Idealtheorie oder gar Klassenkörpertheorie gestützten Beweisen nicht zufrieden, sondern vermutet auf Grund einiger 1889 von Goldscheider ohne Beweis mitgeteilter expliziter Reziprozitätsformeln (aus denen er den in Rede stehenden Satz leicht herleiten kann), daß man zum Beweis dieser Formeln und des genannten Satzes mit der elementaren Arithmetik im Körper der achten Einheitswurzeln einschl. des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes auskommt. Ref. kann diese Vermutung nicht teilen, da das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz, als aus der Theorie der Gaußschen Summen entsprungen, nur solche Reziprozitätsformeln liefert, die Zerlegungsgesetze in absolut-abelschen Zahlkörpern ausdrücken, während es sich hier um den nur über den achten Einheitswurzeln abelschen Körper von $\sqrt[8]{1}$ handelt. *Hasse*.

Gloden, A.: Sur la résolution de la congruence $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. *Euclides*, Madrid **8**, 4—5 (1948).

Gloden, A.: Solutions minima de la congruence $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, $\alpha = 2, 3$, ou 4 , pour $p < 10^3$. *Euclides*, Madrid **8**, 126 (1948).

Gloden, A.: Parametric solutions of two multi-degreed equalities. *Amer. math. Monthly* **55**, 86 (1948).

Analysis.

Allgemeine Reihenlehre:

Copsey, E. H., H. Frazer and W. W. Sawyer: Empirical data on Hilbert's inequality. *Nature*, London **161**, 361 (1948).

H. Frazer [*J. London math. Soc.* **21**, 7—9 (1946)] hat die Ungleichung

$$\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \frac{a_r a_s}{r+s-1} \leq \left(N \sin \frac{\pi}{N}\right) \sum_{r=1}^N a_r^2$$

bewiesen. Die Verff. teilen nun numerische Ergebnisse mit, aus denen hervorgeht, daß die Konstante $N \sin(\pi/N)$ verbessert werden kann, und kündigen weitere Rechnungen an.

Pietsch (Berlin).

Rollero, Aldo: Su un criterio di convergenza per le serie a termini reali positivi. *Euclides*, Madrid **8**, 5—8 (1948).

Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz gewisser Reihen mit positiven Gliedern durch Vergleich mit $\sum \frac{1}{n^x}$.

Rob. Schmidt (München).

Goodstein, R. L.: The strong convergence of the exponential function. *J. London math. Soc.* **22**, 200—205 (1947).

Die Folge $s_r(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^r}{r!}$ ist für jedes rationale x in jeder Skala stark konvergent, d. h. für jedes rationale x und jedes ganzzahlige $r \geq 2$ (x und r nunmehr fest) trifft folgendes zu: Zu jedem natürlichen x gibt es ein $n = n(x)$ derart, daß $[r^x s_r(x)] = [r^x s_n(x)]$ für alle $r \geq n$ erfüllt ist. *R. Schmidt* (München).

Dvoretzky, A. et H. Chojnacki: Sur les changements des signes des termes d'une série à termes complexes. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **225**, 516—518 (1947).

Es ist leicht einzusehen, daß man bei einer divergenten Reihe mit reellen, eine Nullfolge bildenden Gliedern die Vorzeichen so abändern kann, daß die erhaltene Reihe konvergiert. Verff. beweisen den entsprechenden Satz für Reihen mit komplexen Gliedern: Es sei $\sum a_n$ divergent, a_n komplex, $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$; dann läßt sich die Folge ε_n ($\varepsilon_n = +1$ oder $= -1$) so wählen, daß $\sum \varepsilon_n a_n$ konvergiert. Der Beweis ergibt sich aus dem folgenden Hilfssatz: Bei beliebig vorgegebenem n gibt es zu den komplexen Zahlen b_ν ($\nu = 1, \dots, n$) mit $|b_\nu| \leq 1$ die Zahlen $\varepsilon_\nu = \pm 1$ so, daß $\left| \sum_{\mu=1}^p \varepsilon_\mu b_\mu \right| < \sqrt[3]{3}$ ist für $r = 1, \dots, n$. Bei der letzten Abschätzung

kann die Konstante $\sqrt[3]{3}$ durch keine bessere ersetzt werden. Der bewiesene Satz läßt sich nach den Verff. ausdehnen auf Vektorreihen im euklidischen Raum von beliebiger endlicher Dimensionszahl, dagegen ist eine Ausdehnung auf den Raum von unendlich vielen Dimensionen nicht möglich. *Meyer-König* (Stuttgart).

Lorentz, G. G.: Über Limitierungsverfahren, die von einem Stieltjes-Integral abhängen. *Acta math.*, Uppsala **79**, 255—272 (1947).

Die Transformation

$$(1) \quad \sigma_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r u_r \quad (n = 0, 1, \dots)$$

der Folge $s_n = \sum_{r=0}^n u_r$ läßt sich in der Form

$$(2) \quad \sigma(x) = \int_0^{\infty} a(x, t) ds(t)$$

schreiben, wenn x statt n geschrieben wird, $a(x, t)$ eine geeignete Funktion und $s(t)$ eine geeignete Treppenfunktion bedeutet. Dadurch wird man dazu geführt, Transformationen der Art (2) und die zugehörigen Limitierungsverfahren zu betrachten, bei denen $a(x, t)$ für jedes feste $x \geq 0$ eine stetige Funktion von $t \geq 0$ und $s(t)$ in jedem Intervall $(0, c)$ mit $c > 0$ von beschränkter Schwankung ist. Unter diesen

Bedingungen existiert das Stieltjes-Integral $\int_0^c a(x, t) ds(t)$, dessen Grenzwert für $c \rightarrow \infty$ die rechte Seite in (2) sein soll. Verff. gibt nun vor allem die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an, unter denen das Verfahren (2) konvergenztreu ist, d. h. unter denen bei vorhandenem $\lim s(t) = s$ für $t \rightarrow \infty$ die Transformation $\sigma(x)$ für $x \geq 0$ und der $\lim \sigma(x) = \sigma$ für $x \rightarrow \infty$ vorhanden ist. Es sind dies die folgenden Bedingungen: Für jedes $x \geq 0$ gibt es ein $c > 0$, so daß $\text{Var } a(x, t) < +\infty$ (c, \infty)

ist, ferner gibt es die positiven Zahlen d , x_0 , M und K , so daß $\text{Var } a(x, t) \leq M$ ist für $x \geq x_0$ und daß $|a(x, t)| \leq K$ ist für $x \geq x_0$, $0 \leq t \leq d$, schließlich ist bei $x \rightarrow \infty$ der $\lim a(x, t) = a^*(t)$ für jedes $t \geq 0$ vorhanden. Das Verfahren (2) heißt permanent, wenn es konvergenztreu ist und wenn bei $\lim s(t) = s$ gilt $\sigma = s$. Permanenz liegt genau dann vor, wenn außer den Bedingungen für die Konvergenztreue noch die Forderung $a^*(t) = 1$ für jedes $t \geq 0$ erfüllt ist. — Durch eine formale partielle Integration des Integrals in (2) geht dasselbe, wenn das integralfreie Glied verschwindet, in das Integral

$$(3) \quad \sigma_1(x) = - \int_0^{\infty} s(t) da(x, t)$$

über. Die Limitierungsverfahren (2) und (3) werden als dual zueinander bezeichnet. Verf. gibt zu jedem dieser beiden Verfahren hinreichende Bedingungen dafür an, daß es im dualen Verfahren enthalten ist, d. h. daß eine durch das Verfahren limitierbare Funktion auch durch das duale Verfahren limitierbar ist, und zwar zu demselben Grenzwert. — Die Existenz des Stieltjes-Integrals $\int_0^c a(x, t) ds(t)$ ist auch

dann gewährleistet, wenn statt der oben über $a(x, t)$ und $s(t)$ gemachten Voraussetzungen umgekehrt verlangt wird, daß $s(t)$ für $t \geq 0$ stetig und $a(x, t)$ für jedes $x \geq 0$ in jedem Intervall $0 \leq t \leq c$ von beschränkter Schwankung ist. Verf. weist darauf hin, wie man in diesem Fall Sätze über die Konvergenztreue und Permanenz des Verfahrens (2) durch Übergang zum dualen Verfahren und Anwendung eines Satzes von F. Riesz [C. r. Acad. Sci., Paris **149**, 974—977 (1909)] erhalten kann. — Zum Schluß gibt Verf. Anwendungen und Beispiele. Es sei P das Verfahren der bewichteten Mittel, das zu der Transformation

$$\sigma(x) = \frac{1}{P(x)} \int_0^x p(t) s(t) dt \quad \text{mit} \quad P(x) = \int_0^x p(t) dt$$

gehört ($p(t)$ für $t \geq 0$ positiv und stetig, $s(t)$ in jedem endlichen Intervall L -integrierbar). Ist Q ein anderes solches Verfahren mit der Gewichtsfunktion $q(t)$, so erhält man unter Verwendung des oben wiedergegebenen Satzes über die Konvergenztreue des Verfahrens (2), daß P in Q sicher dann enthalten ist, wenn $q(t)p(t)$ in $0 \leq t < \infty$ monoton nicht wachsend und Q permanent (d. h. für $x \rightarrow \infty$ der $\lim Q(x) = \infty$) ist. — Wird das zu der Transformation (1) gehörige Verfahren A

als ein Verfahren (2) aufgefaßt, so gehört dazu als dual das Verfahren $B: \sigma_n = \sum_{v=0}^{\infty} b_{nv} s_v$ mit $b_{nv} = a_{nv} - a_{n, v+1}$. Die Sätze über die dualen Verfahren (2) und (3) liefern dann Bedingungen, unter denen A in B , und solche, unter denen B in A enthalten ist; ferner ergibt sich die folgende hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von A und B : es gibt für $n = 0, 1, \dots$ die positiven Zahlen $q_n < 1$, so daß $0 \leq a_{n, v+1} \leq q_n a_{nv}$ für $n, v = 0, 1, \dots$ ist. Im allgemeinen braucht, wenn außer der Permanenz von A oder B keine zusätzlichen Voraussetzungen gemacht werden, weder A in B noch B in A enthalten zu sein. — Druckfehlerberichtigung. Auf S. 266 der Arbeit des Verf. sind in der drittletzten Zeile von Satz 5 und in der vierten Zeile von Satz 6 je die Gleichungsnummern (23) und (24) miteinander zu vertauschen. Auf S. 269 und 270 sind in der ersten Zeile von Satz 8 und in der ersten Zeile von Satz 9 je die Buchstaben A und B zu vertauschen. Meyer-König (Stuttgart).

Delange, H.: Théorèmes taubériens généraux. C. r. Acad. Sci., Paris **252**, 28—31 (1947).

Mit Hilfe der komplexen Funktion $N(u)$ ($u > 0$) wird die Transformation

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right) s(t) dt \quad (x > 0)$$

der komplexen Funktion $s(t)$ gebildet. Es werden mehrere Systeme von Voraussetzungen angegeben, unter denen aus

$$\Phi(kx) - \Phi(x) = \frac{\Phi(x)}{\log x} \log k + o(1) \text{ für jedes } k > 0 \text{ bei } x \rightarrow \infty$$

Aussagen über $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| s(t) - \Phi(t) - C \frac{\Phi(t)}{\log t} \right|$ mit $C = \int_0^\infty N(u) \log \frac{1}{u} du$

gemacht werden können. Die genaue Wiedergabe der mitgeteilten Sätze ist hier nicht möglich wegen ihres Umfangs. Von den Folgerungen sei ein Tauberscher Satz genannt, bei dem von

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) = s, \quad k(u) = \int_u^\infty N(t) dt \quad (a_n \text{ komplex, } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty)$$

auf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ geschlossen wird, wenn neben anderen die Voraussetzungen

$$\int_0^\infty N(t) t^{iu} dt \neq 0 \text{ für reelles } u \text{ und } a_n = O((\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n) \text{ erfüllt sind.}$$

Meyer-König (Stuttgart).

Delange, H.: Théorèmes taubériens généraux. II. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 483—485 (1947).

Verf. hat in einer früheren Note [C. r. Acad. Sci., Paris 217, 309—311 (1943)] Integrale der Form

$$\int_0^c K\left(\frac{t}{x}\right) ds(t) \quad (s(t) \text{ nicht abnehmend})$$

studiert. Jetzt werden auf solche Integrale bezügliche Taubersätze angegeben, z. B.: Unter gewissen Voraussetzungen ist dann und nur dann

$$\int_0^\infty K\left(\frac{t}{x}\right) ds(t) \sim A x^{q(x)} \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (\rightarrow 0),$$

wenn für $t \rightarrow \infty \quad (\rightarrow 0)$

$$s(t) \sim \frac{A t^{q(t)}}{C(q(t))} \quad \text{mit} \quad C(z) = z \int_0^\infty K(u) u^{z-1} du.$$

Diese Sätze lassen sich bei gewissen ganzen Funktionen mit reellen negativen Nullstellen anwenden zur Untersuchung der Verteilung dieser Nullstellen [vgl. auch Verf., C. r. Acad. Sci., Paris 222, 853—854 (1946)]. Meyer-König (Stuttgart).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Wang, Fu Traing: A remark on (C) summability of Fourier series. J. London math. Soc. 22, 40—47 (1947).

Es sei $f(t)$ periodisch mit Periode 2π , L -integrierbar in $(0, 2\pi)$, und es sei (1) $\sum A_n(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ ihre Fouriersche Reihe. Es sei

$$\Phi(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2s]/2, \quad \Phi_\alpha(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \Phi(u) du$$

$$(t > 0, \alpha > 0), \quad R_\alpha(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega - n)^\alpha A_n(x) \quad (\alpha \geq 0).$$

Die Reihe (1) wird (C, α) -limitierbar zur Summe s genannt, wenn $R_n(\omega) \omega^{-\alpha} \rightarrow s$ für $\omega \rightarrow +\infty$. Verf. beweist, daß die Reihe (1) (C, α) -limitierbar zur Summe s ist, wenn $\Phi(t) = o[t^\alpha \log(1/t)]$ für $t \rightarrow +\infty$, $\Phi(t) = o[t^\alpha \log(1/t)]$. Dieser Satz verallgemeinert ein früheres Theorem von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [Ann.

Seuola norm. sup. Pisa, II. s. 3, 43—46 (1932); dies. Zbl. 8, 310] über die gewöhnliche Konvergenz auf die (C, α) -Konvergenz ($\alpha > 0$). *L. Cesari* (Bologna).

Misra, M. L.: The summability (A) of the successively derived series of a Fourier series and its conjugate series. *Duke math. J.* 14, 167—177 (1947).

Let $f(x)$ be a function integrable in $(-\pi, +\pi)$ and denote by a_n, b_n its Fourier constants. Write $F(r, x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$ and $V(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) r^n$. If there is a polynomial $P(t)$ of degree $\leq k-1$ and a number l such that $q_k(t) = o(t^k)$ for $t \rightarrow 0$, $q_k(t) = f(x+t) - P(t) + (-1)^k [f(x-t) - P(-t)] - 2l t^k k!$ then l is called the k -th generalized symmetric derivative of the function $f(x)$. The author proves:

$$(1) \quad \text{If } \int_0^t q_k(t) dt = o(t^{k+1}), \text{ then } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varepsilon^k}{\partial x^k} F(x, r) = l;$$

$$(2) \quad \text{If } \int_0^t \psi_k(t) dt = o(t^{k+1}), \psi_k(t) = f(x+t) - f(x) - (-1)^k [f(x-t) - f(x)],$$

$$\text{then } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\varepsilon^k}{\partial x^k} V(x, r) - \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi_k(t) \frac{dk}{dt} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \right] = 0, \text{ where } \varepsilon = \arcsin(1-x).$$

These theorems generalize, for arbitrary positive integers k , those of Fatou [*Acta math.*, Uppsala 30, 335—400 (1906)] and Plessner [*Mitteilungen Math. Sem. Gießen* Nr. 10, 1—36 (1923)]. *G. G. Lorentz* (Tübingen).

Boas, R. P. jr.: Inequalities for the coefficients of trigonometric polynomials. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 50, 492—495 (1947).

A series of inequalities for the coefficients of a trigonometric polynomial $f(t) = \sum_{k=-n}^{+n} a_k \exp ikt$, $a_{-k} = \overline{a_k}$, are proved. If $M = \max |f(t)|$ and

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt, \text{ then for every } k \geq 0, (1) |a_k| \leq M \cos \frac{\pi}{p+2}, \text{ where } p \text{ is the largest odd integer } \leq nk, (2) |a_0| + |a_k| \leq (\pi([nk] + 2)) \leq M, \text{ and for } k \geq n/2$$

(3) $|a_0| + \frac{2}{3} |a_k| \leq (1 + \frac{1}{3})^2 I$, $k \geq n/2$. These inequalities are generalizations or improvements of those of J. C. van der Corput and C. Visser [*Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 49, 383—392 (1946)], and (2) is closely related to the inequality $|a_k| \leq a_0 \cos(\pi([nk] + 2))$, $k \geq 0$, $f(t) \geq 0$, due to E. v. Egerváry and O. Szász [*Math. Z.* 27, 641—652 (1928)]. The method of proof consists in defining a non-

decreasing $\alpha(t)$ such that the convolution $\int_0^{2\pi} f(x-t) d\alpha(kt)$ is a simple trigonometric polynomial depending upon a_0 and a_k . *G. G. Lorentz* (Tübingen).

Šnejder (Schneider), A. A.: Über Reihen nach Walshschen Funktionen mit monotonen Koeffizienten. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 12, 179—192 (1948) [Russisch].

Für das normierte Orthogonalsystem $\varphi_n(x)$, $0 \leq x \leq 1$, von Walsh (dieses System entsteht aus dem Orthogonalsystem von Rademacher durch Vervollständigung; vgl. Kaczmarz und Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935; dies. Zbl. 13, 9) wird die Konvergenz von Reihen

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n \text{ monoton gegen Null abnehmend}$$

untersucht. Diese hängt naturgemäß von der Anordnung der Funktionen $\varphi(x)$ im System ab: Bei einer solchen Anordnung (von Paley) ist jede Reihe (*) überall

in $0 < x < 1$ und gleichmäßig in $\delta < x < 1$, $\delta > 0$ konvergent; bei einer anderen (von Kaczmarz) konvergiert (*) fast überall, wenn $\sum c_n^2 < +\infty$ gilt, und divergiert fast überall, wenn $c_n \neq o(1/\log n)$ ist. *G. G. Lorentz* (Tübingen).

Cenov, I. V.: Einige Fragen der Theorie der Approximation von Funktionen. Mat. Sbornik, II. s. 21, 435—438 (1947) [Russisch].

Besteht in $a \leq x \leq b$ für zwei Funktionen die Ungleichung $|f^{(n+1)}| < |q^{(n+1)}|$, so gelten entsprechende Ungleichungen für die Annäherungen dieser Funktionen durch Lagrange'sche Interpolationspolynome f_n bzw. q_n , z. B. $|f(x) - f_n(x)| < |\varphi(x) - q_n(x)|$ und

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx < \int_a^b |\varphi(x) - q_n(x)|^2 dx.$$

(Die n Interpolationspunkte liegen in a, b .) Verf. teilt einige Sätze dieser Art mit Beweisandeutungen mit. *W. Hahn* (Berlin).

Funktionentheorie:

Henstock, R.: The efficiency of matrices for Taylor series. J. London math. Soc. 22, 104—107 (1947).

Von Y. Okada [„Über die Annäherung analytischer Funktionen“, Math. Z. 23, 62—71 (1925)] wurden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß ein Summierungsverfahren (a_{pq}) die Potenzreihe einer um $z = 0$ regulären analytischen Funktion $f(z)$ in ihrem Mittag-Lefflerschen Stern zum Funktionswert $f(z)$ — und zwar in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilbereich des Sterns gleichmäßig — summiert. Verf. zeigt: In jedem Falle läßt sich zu einer solchen Matrix (a_{pq}) eine Matrix (c_{pq}) konstruieren, die das gleiche leistet wie (a_{pq}) , die aber der letzten der drei Toeplitz'schen Permanenzbedingungen, $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| \leq M$ unabhängig von p , nicht genügt. *R. Schmidt* (München).

Roussel, A.: Une généralisation du développement de Taylor. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 23—24 (1947).

$g(x, h)$ sei regulär für $|x - a| \leq R$ und $|h| \leq R'$; ferner sei $g(x, 0) \equiv 0$. Dann wird für $f(x + h) - f(x)$ eine Reihenentwicklung angegeben, die für $|x - a| + |h| < \min(R, R')$ konvergiert. Dabei ist

$$f(x) = g(a, x - a) + \int_0^{x-a} g'_x(x - t, t) dt.$$

Die Glieder der Reihenentwicklung sind $g_{-m}(x, h)$ und $g_n(x, h)$. Sie gehen aus $g(x, h)$ durch Differentiation nach h und Integration nach x (bzw. umgekehrt) hervor. *Behnke* (Münster i. W.).

Roussel, A.: Sur certaines généralisations des séries de Taylor. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 348—350 (1947).

Verallgemeinerung der vorsteh. besprochenen Arbeit des Verf. für den Fall, daß g eine Funktion der 4 komplexen Veränderlichen x, y, h, k und regulär für $|x - a| < R_1$, $|y - b| < R_2$, $|h| < R_3$, $|k| < R_4$ ist. *Behnke* (Münster i. W.).

Richards, Paul I.: A special class of functions with positive real part in a half-plane. Duke math. J. 14, 777—786 (1947).

Untersuchungen über ultra-hochfrequente Schwingungen haben Veranlassung gegeben, die Klasse E der Funktionen mit folgenden Eigenschaften zu untersuchen: 1. $f(s) = f(\sigma + i\tau)$ ist regulär in $\sigma > 0$, 2. $f(s)$ besitzt auf $\sigma = 0$ keine anderen Singularitäten als Pole, 3. $f(\bar{s}) = \bar{f}(s)$, 4. $\Re(f(s)) \geq 0$ in $\sigma \geq 0$. — Verf. gibt eine sachlich und beweistechnisch einheitliche Darstellung der bekannten Ergebnisse über Funktionen der Klasse E , ferner eine Anzahl von neuen Sätzen. Diese betreffen: a) Funktionen der Klasse E mit $\Re(f(s)) = 0$ auf $\sigma = 0$. b) Die Ableitungen von

Funktionen der Klasse E . c) Funktionen der Klasse E , für die $\Re(f(s)) \geq \delta > 0$ auf $\sigma = 0$ ist. d) Funktionen der Klasse E mit $f(s) \leq K$ auf $\sigma = 0$. e) Umformung eines Theorems von Julia. f) Partialbruchzerlegung von Funktionen der Klasse E [Anwendung eines Satzes von W. Cauer über das Poissonsche Integral von Funktionen mit positivem Realteil, Bull. Amer. math. Soc. 38, 713—717 (1932); dies. Zbl. 5, 361]. g) Integraldarstellung von $\Im(f(s))$ für Funktionen der Klasse E , die auf $\sigma = 0$ regulär sind. h) Produktdarstellung von Funktionen der Klasse E mit $\Re(f(s)) = 0$ auf $\sigma = 0$. R. Schmidt (München).

Ibragimoff (Ibragimov), L.: Sur la convergence de la série interpolatoire d'Abel-Gontcharoff. Mat. Sbornik, II. s. 21, 49—60 u. franz. Zusammenfassg. 61—62 (1947) [Russisch].

Die Interpolationsreihe von Abel-Gončarov einer analytischen Funktion $F(z)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\alpha_k) P_k(z), \text{ wo } P_k(z) = \int_{\alpha_0}^z dz_1 \int_{\alpha_1}^{z_1} dz_2 \dots \int_{\alpha_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_k,$$

ist dadurch charakterisiert, daß ihre Summe im n -ten Punkte α_n einer Punktfolge $\{\alpha_k\}$ dieselbe n -te Ableitung hat wie die gegebene Funktion $F(z)$. V. Gončarov [Ann. sci. Ecole norm. sup., III. s. 74, 1—78 (1930)] hat die Konvergenz der Reihe gegen die vorgegebene ganze Funktion $F(z)$ unter gewissen Beschränkungen betreffend das Anwachsen von $F(z)$ und der Zahlenfolge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu}$ ($n = 1, 2, \dots$)

untersucht. Verf. stellt ein allgemeines Konvergenzkriterium der Reihe für die gesamte Klasse der ganzen Funktionen auf, welches Kriterium einige Resultate von Gončarov als Folgerungen enthält. Um die Genauigkeit des Kriteriums festzustellen, zeigt er ferner, daß eine ganze Funktion $F(z)$ und eine Punktfolge $\{\alpha_k\}$ existieren derart, daß unter gewissen Bedingungen die Reihe divergiert. Paatero.

Ahlfors, Lars V.: Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 35, 24 S. (1947).

Sur une surface de Riemann F , une fonction $w = u + iv$ analytique régulière (en général multiforme), dont la dérivée w' par rapport au paramètre local est uniforme, est appelée intégrale abélienne. Son intégrale de Dirichlet est définie par

$$D(u) = D(v) = \iint_F \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

L'Aut. se limite au cas où F est de type parabolique et où l'intégrale de Dirichlet est finie (cas de Nevanlinna). Après une rapide étude topologique de la surface F et de ses cycles à 1 dimension (existence d'une base d'homologie; existence d'une base canonique $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ ayant des propriétés particulières relativement à une suite de surfaces F_0, F_1, F_2, \dots approchant la surface F), l'Aut. établit que l'intégrale mixte

$$D(u_1, u_2) = D(v_1, v_2) = \iint_F \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dx dy$$

relative à deux intégrales abéliennes, satisfait, moyennant quelques restrictions, à la relation

$$D(u_1, u_2) = \sum_i \left(\int_{A_i} du_1 \int_{B_i} dv_2 - \int_{A_i} dv_2 \int_{B_i} du_1 \right).$$

A partir de là, il montre l'existence d'intégrales abéliennes w_i (intégrales normales), telles que les périodes de w_i relatives aux cycles A_j sont nulles pour $j \neq i$; ces intégrales sont définies à une constante additive près; la matrice des périodes des w_i relatives aux cycles B_j est symétrique. Dufresnoy (Taksim-Istanbul).

Walsh, J. L.: On the location of the critical points of harmonic measure. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 18—20 (1947).

Etant donnés sur le cercle unité (parcouru dans le sens positif) les points $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$, on pose $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$. La dérivée de la fonction

$$\prod_{i=1}^n \frac{z - b_i}{z - a_i}$$

ne possède pas de zéro dans la région du plan contenant le point b_k et limitée par le cercle qui coupe orthogonalement le cercle unité aux points a_k et a_{k+1} , ni dans la région contenant le point a_{k+1} et limitée par le cercle qui coupe orthogonalement le cercle unité aux points b_k et b_{k+1} ($k = 1, 2, \dots, n$). Dufresnoy (Taksim-Istanbul).

Schaeffer, A. G. and D. C. Spencer: A variational method in conformal mapping. Duke math. J. **14**, 949—966 (1947).

Verff. entwickeln eine funktionentheoretische Variationsmethode, die eng verwandt ist mit der von Courant beim Plateauschen Problem benutzten [Acta math., Uppsala **72**, 51—98 (1940); dies. Zbl. **23**, 399] und beispielsweise in folgendem besteht: Aus dem Definitionsgebiet wird das schlichte Zwischengebiet zweier benachbarter Bogen Γ und Γ' mit gleichen Endpunkten ausgespart; L und L' seien ihre Bilder vermöge der zu untersuchenden schlichten Funktion $S(z)$. Dann werden Γ und Γ' punktweise aufeinander bezogen, und durch Identifizieren entsprechender Punkte wird ein ideales Gebiet hergestellt, in dem $S(z)$ regulär ist, wenn auch entsprechende Punktepaare auf L und L' identifiziert werden. Es werden insbesondere Formeln für die erste Variation von $S(z)$ entwickelt, wenn $\Gamma' = \Gamma_\varepsilon$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Γ strebt. Für Anwendungen, die erst Wert und Tragweite der Methode zu beurteilen erlauben, wird auf eine frühere, dem Ref. nicht zugängliche Arbeit [Duke math. J. **12**, 107—125 (1945)] sowie auf weitere Veröffentlichungen verwiesen.

Grunsky (Trossing/Wttbg.).

Modulfunktionen:

Blij, F. van der: A matrix representation of binary modular congruence groups of degree m . I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 942—951 (1947).

Blij, F. van der: A matrix representation of binary modular congruence groups of degree m . II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 1084—1091 (1947).

In der 1947 abgeschlossenen Promotionsschrift des Verf.: Theta functions of degree m , Leiden 1947, wurde die analytische Theorie der Θ -Funktionen m -ten Grades und ihrer Argumenttransformation untersucht. Im Anschluß an C. L. Siegels analytische Theorie der quadratischen Formen [Ann. Math., Princeton, II. s. **36**, 527—606 (1935); dies. Zbl. **12**, 197] werden modulare Matrizen m -ten Grades eingeführt, die zu neuen Verallgemeinerungen der Gaußschen Summen führen. Die beiden gegenwärtigen Mitteilungen übernehmen in sehr konzentrierter Form einige frühere Ergebnisse des Verf. und beschaffen Funktionenfolgen, deren Elemente nach Ausübung einer Modultransformation übergehen in Linearkombinationen benachbarter Elemente. Letztere erweisen sich als linear unabhängig, wenn ein vollständiges System inkongruenter Matrizen durchlaufen wird. Das 3. Kapitel beschafft in 2 Theoremen die Matrizendarstellung einer Quotientengruppe, welche sich als einfach isomorph erweist mit der binär modularen Kongruenzgruppe des Grades $m \bmod v$. Im abschließenden 4. Kapitel gelingt die rein algebraische Begründung der auf transzendenten Weg ursprünglich gefundenen Matrizendarstellung der Quotientengruppe $G(\varepsilon_n)/G(v\varepsilon_n)$. Wilhelm Maier (Rostock).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Kells, L. M.: Elementary differential equations. 3. ed. New York, McGraw-Hill Book Co., 1947. XIV, 311 p. \$ 3.00.

Baiada, E.: Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 258—263 (1947).

Auf Grund eines Verfahrens von Tonelli beweist Verf.: Wenn $f(x, y)$ für (x, y) aus dem Bereich $C = (x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b)$, $a > 0$, $b > 0$ stetig ist, so besteht die Klasse der stetigen Funktionen $y(x)$, die der Integralgleichung

$$y(x) \leq y(\xi) + \int_{\xi}^x f[x, y(x)] dx$$

mit beliebigen x und y und $x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + \delta \leq x_0 + a$ genügen, aus den Funktionen $y(x) \leq y_M(x)$, wo $y_M(x)$ das Maximalintegral (integrale superiore) der Gleichung

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

ist. Dieser Satz kann den Sätzen über den Vergleich der Integrale der Gleichung (1) und ihrer Abhängigkeit von den Parametern zugrunde gelegt werden. *Sansone.*

Baiada, E.: Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 264—271 (1947).

Es sei C der Bereich, der durch die Bedingungen

$$C \equiv (x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b), a > 0, b > 0,$$

definiert ist, $f(x, y)$ stetig in C , $|f(x, y)| \leq M$; $\varepsilon(x; \delta, n) = \max |f(x, y_1) - f(x, y_2)|$ für $(x, y_1), (x, y_2)$ in C , $|y_1 - y_2| \leq (4M + 3)\delta/n$ ($n = 1, 2, \dots$); $\psi(x)$ eine nicht negative, nicht abnehmende Funktion, so daß

$$\psi(x) - \psi(\xi) \geq 2 \int_{\xi - \frac{\delta}{n}}^{x - \frac{\delta}{n}} \varepsilon\left(x, \frac{\delta}{n}\right) dx \quad (\xi > x).$$

Unter diesen Voraussetzungen wird, wenn $y(x)$ eine stetige Funktion ist, die der

Gleichung $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx$; $\psi(x)$ genügt, $y(x)$ kleiner als das Minimal-

integral (integrale inferiore) der Integralgleichung $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx$.

Aus diesem Satz ergibt sich insbesondere der übliche Vergleichssatz für die Integrale der Gleichungen $y' = f(x, y)$, $y' = F(x, y)$. — Verf. beweist schließlich die Halb-stetigkeit von oben (unten) des Maximal-(Minimal-)Integrals der Gleichung $y' = f(x, y, \lambda)$ bez. des Parameters λ und der Anfangswerte unter der Voraussetzung, daß $f(x, y, \lambda)$ eine stetige Funktion ist. *G. Sansone (Firenze).*

Caffero, F.: Un'osservazione sulla continuità rispetto ai valori iniziali degli integrali dell'equazione: $y' = f(x, y)$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 478—482 (1947).

Gegeben sei die Gleichung $y' = f(x, y)$, wobei $f(x, y)$ im Rechteck $R: a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$, definiert sei und dort den Annahmen von Carathéodory genüge; Verf. beweist, indem er die Zuordnung zwischen den Punkten von R und den von diesen Punkten ausgehenden Integralkurven untersucht, daß jede Gruppe von Bedingungen, die hinreichen, um Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven bez. der Anfangswerte zu beweisen, auch hinreicht, um die stetige Abhängigkeit von diesen Anfangswerten festzustellen. *G. Sansone (Firenze).*

Barbuti, U.: Sull' integrale massimo e minimo e sulla unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 272—276 (1947).

Ergebnisse von A. Rosenblatt, M. Nagumo und O. Perron verallgemeinernd, beweist Verf. folgendes Eindeutigkeitskriterium: Wenn $F(x, y)$ im Rechteck $x^0 \leq x \leq x^0 + a$, $|y - y^0| \leq b$, $a > 0$, $b > 0$ stetig ist und für jedes Paar von stetigen Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1(x^0) = y_2(x^0) = y^0$, $y_1(x) \leq y_2(x)$, $|y_1(x) - y^0| \leq b$, $|y_2(x) - y^0| \leq b$ gilt: $F[x, y_2(x)] - F[x, y_1(x)] \leq [y_1(x) - y_2(x)]/(x - x^0)$, dann besitzt die Gleichung $y' = F(x, y)$ nur ein von (x^0, y^0) ausgehendes Integral. Der Satz wird auf Systeme verallgemeinert.

G. Sansone (Firenze).

Stampacchia, G.: Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 411—418 (1947).

Es handelt sich um einige Resultate zu Randwertproblemen für ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, unter denen wir das Folgende hervorheben: Seien $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ im Bereich $\Gamma: a \leq x \leq b$, $|y| < +\infty$, $|y'| < \infty$, definiert, in (y, z) stetig für jedes feste x , und in x quasi-stetig für jedes feste (y, z) . Wenn in Γ gilt

$$(1) \quad |f(x, y, z)| \leq \varphi(x), \quad |g(x, y, z)| \leq \varphi(x),$$

mit $\varphi(x) \geq 0$ und nach Lebesgue integrierbar, so hat das System

$$(2) \quad y(x) = y(a) + \int_a^x f[x, y(x), z(x)] dx, \quad z(x) = z(a) + \int_a^x g[x, y(x), z(x)] dx$$

in (a, b) mindestens eine Lösung $y = y(x)$, $z = z(x)$ mit absolut stetigen $y(x)$, $z(x)$ derart, daß

$$(3) \quad \alpha_1 y(a_1) + \beta_1 z(a_1) + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 y(a_2) + \beta_2 z(a_2) + \gamma_2 = 0,$$

mit $a \leq a_1 < a_2 \leq b$ und $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ gilt. Der Beweis dieser Tatsache beruht auf einem interessanten elementaren Verfahren, das ursprünglich für Funktionalgleichungen entwickelt wurde [L. Tonelli: Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra. Bull. Calcutta math. Soc. 20, 31—48 (1928)]. Verf. betrachtet anschließend weitere Fälle, darunter den Fall, daß eine Integralkurve des Systems (2) gesucht wird, die sich, anstatt (3) zu genügen, an zwei Kurven in den Ebenen $x = a_1$ und $x = a_2$ anschmiegt, sowie den Fall, daß an Stelle von (1) die Ungleichungen treten:

$$|f(x, y, z)| \leq \varphi(x) \{|y| + |z|\} + \psi(x), \quad |g(x, y, z)| \leq \varphi(x) \{|y| + |z|\} + \psi(x),$$

mit $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) \geq 0$ und in (a, b) nach Lebesgue integrierbar. S. Cinquini.

Miranda, C.: Problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in forma parametrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 164—169 (1947).

Soient α et β les cosinus directeurs de l'axe tangent positif τ d'une courbe plane orientée C douée de tangente et courbure continues, et soit Θ l'angle orienté $x\tau$. Soit en outre $f(x, y, \alpha, \beta)$ une fonction continue ainsi que ses premières dérivées partielles dans le domaine $-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq \alpha \leq 1$. L'auteur considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d\Theta}{ds} = \lambda f(x, y, \alpha, \beta)$$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Il démontre, entre autres, les deux théorèmes suivants: a) Si

$$(2) \quad |f(x, y, \alpha, \beta)| \leq M,$$

$$(3) \quad f^2 + \beta f_x - \alpha f_y \leq -m < 0,$$

il existe, pour chaque λ de $(0, 1)$, au moins une courbe intégrale de (1) qui appartient à la classe Γ des courbes C qui relient deux points donnés P_1 et P_2 ; b) S'il existe un cercle de centre $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ qui contient P_2 tel que en dehors de lui soit

$$(4) \quad 1 + [\alpha(y - y_1) - \beta(x - x_1)] f(x, y, \alpha, \beta) > 0,$$

en subsistant (3), pour chaque λ de $(0,1)$, alors, il existe une et une seule courbe intégrale de (1) qui appartient à Γ . — En fin l'auteur démontre que l'hypothèse (4) seule est suffisante à assurer l'existence d'une courbe intégrale au moins.

Gaetano Fichera (Roma).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Finzi, A.: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui, comme les systèmes normaux, comportent autant d'équations que de fonctions inconnues. I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 136—142 (1947).

Verf. entwickelt in dieser ersten einer Reihe geplanter Abhandlungen Voraussetzungen und Ziele seiner weiteren Untersuchungen. Die Voraussetzungen sind die bekannten Existenztheoreme für Lösungen partieller Differentialsysteme und Pfaffscher Systeme, die man Cauchy, S. Kowalewski, Meray, Delassus, Riquier, Gunther, Janet, Hadamard und E. Cartan verdankt. Es handelt sich zunächst um ein System

$$F_i = \sum_{h_0 \dots h_m} E_{h_0 h_1 \dots h_m}^{ij} \frac{\partial^h \varphi_j}{\partial x^{h_0} \partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_m}} + M_i = 0 \quad (h_0 + h_1 + \dots + h_m = h; \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

der Ordnung h von n Gleichungen für n unbekannte Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ von $m+1$ unabhängigen Veränderlichen x^0, x^1, \dots, x^m , das den Bedingungen des Cauchy-Kowalewskischen Existenztheorems genügt. Für ein derartiges „Normalsystem“ ist die Determinante $|E_{h_0 0 \dots 0}^{ij}|$ notwendig von Null verschieden. Verf. diskutiert den Fall $|E_{h_0 0 \dots 0}^{ij}| = 0$ (vom Rang $n-1$) längs einer charakteristischen Mannigfaltigkeit und die Berührungsverhältnisse der sich dort verzweigenden Integralmannigfaltigkeiten sowie die Möglichkeiten, die die Übergänge von einer zur anderen Anfangshyperfläche bieten. — Das weitere Programm der Untersuchung nimmt seinen Ausgang von einem anormalen System (1) von ebenso vielen Gleichungen der Ordnung h wie unbekannten Funktionen und der Möglichkeit, diesem System ein weiteres (1⁽¹⁾) der Ordnung $h^{(1)}$ (im allgemeinen $> h$) zuzuordnen, das von jeder Lösung des Systems (1) befriedigt wird. Umgekehrt befriedigen die Lösungen des Systems (1⁽¹⁾) bei passend gewählten Anfangsbedingungen für die Funktionen φ und ihre $h^{(1)}-1$ ersten Ableitungen wiederum die Gleichungen des Systems (1), wenn (1⁽¹⁾) ein Normalsystem ist. Ist dagegen (1⁽¹⁾) kein Normalsystem, so läßt sich der Prozeß wiederholen und führt eventuell nach endlich vielen Schritten über die Systeme der Ordnung $(h^{(2)}), (h^{(3)}), \dots, (h^{(l-1)})$ zu einem Normalsystem der Ordnung $(h^{(l)})$. Für passend gewählte Anfangsbedingungen lassen sich dann wiederum die Gleichungen des Ausgangssystems durch Lösungen des Systems von der Ordnung $(h^{(l)})$ befriedigen. Gelangt man jedoch auf diese Weise nie zu einem Normalsystem, so besteht eine Identität der Form $\Psi(F_1, F_2, \dots, F_n, x) = 0$. Alle diese Fälle sollen in den geplanten Fortsetzungen der Untersuchung eingehend behandelt und mit Beispielen belegt werden.

M. Pinl (Köln).

Finzi, A.: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui, comme les systèmes normaux, comportent autant d'équations que de fonctions inconnues. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 143—150 (1947).

In Fortsetzung seiner vorhergehenden Untersuchung ordnet Verf. dem (in höchster Ordnung eventuell nicht linearen) Differentialsystems $F_i = 0$ der Ordnung h die Determinante

$$\Omega = \sum_{h_0 h_1 \dots h_m} E_{h_0 h_1 \dots h_m}^{ij} p_0^{h_0} p_1^{h_1} \dots p_m^{h_m}$$

zu. Darin bedeuten die n^2 Funktionen $E_{h_0 h_1 \dots h_m}^{ij}$ Koeffizienten des Differentialsystems, welche keine Ableitungen höchster Ordnung enthalten. Das System wird als anormal vorausgesetzt, so daß Ω identisch in den Parametern p (jedoch vom Rang $n-1$) verschwindet. Ω ergibt sich als homogene Form in p vom Grade nh

mit Koeffizienten, die identisch in den unabhängigen Veränderlichen (und im nicht-linearen Falle auch identisch in den abhängigen Veränderlichen φ und deren Ableitungen) verschwinden. Sind dann $\Delta_{r_0 r_1 \dots r_m}^{ij}$ die algebraischen Komplemente der Elemente von Ω , so verschwinden in der Linearkombination

$$\Phi_1 = \sum \Delta_{r_0 r_1 \dots r_m}^{i1} \frac{\varepsilon^{h(n-1)} F_i}{\partial x^{r_0} \partial x^{r_1} \dots \partial x^{r_m}} = 0 \quad (r_0 + r_1 + \dots + r_m = (n-1)h)$$

der Gleichungen $F_i = 0$ des Ausgangssystems sämtliche Koeffizienten der Ableitungen höchster Ordnung nh der unbekannten Funktionen φ . Umgekehrt ist $F_i = 0$ ein anormales System, wenn eine derartige Linearkombination existiert. — Nach diesen allgemeinen Erörterungen beginnt Verf. die Durchführung der Beweise zu den in der vorhergehenden Abhandlung aufgestellten Behauptungen über die dem System (1) — gegeben durch $F_i = 0$ — zugeordneten Systeme $(1^{(1)})$, $(1^{(2)})$, ... Dabei besteht z. B. das System $(1^{(1)})$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^{h(1)-h} F_i}{\partial x^{0h(1)-h}} = 0, \quad \Phi_1 = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n; \quad h^{(1)} = h_{n-1}).$$

Nach Diskussion der zu diesen Systemen gehörigen charakteristischen Hyperflächen wird als Beispiel der entwickelten Theorie das System

$$a_\lambda \frac{\partial u}{\partial x^0} + b_\lambda \frac{\partial u}{\partial x^1} + c_\lambda \frac{\partial v}{\partial x^0} + d_\lambda \frac{\partial v}{\partial x^1} + \dots = 0 \quad (\lambda = 1, 2); \quad \Omega = \begin{vmatrix} a_1 p_0 + b_1 p_1 & c_1 p_0 + d_1 p_1 \\ a_2 p_0 + b_2 p_1 & c_2 p_0 + d_2 p_1 \end{vmatrix} = 0$$

M. Pinl (Köln).

Finzi, A.: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui, comme les systèmes normaux, comportent autant d'équations que de fonctions inconnues. III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 288—297 (1947).

Verf. hatte in der ersten seiner Mitteilungen im wesentlichen das Programm seiner Untersuchungen entwickelt, in der zweiten war die Durchführung der Beweise begonnen worden. In der vorliegenden Note werden diese Beweise weitergeführt und zunächst die Fälle behandelt, in welchen die hn abgeleiteten Systeme des ursprünglich zugrunde liegenden anormalen Systems selbst auch keine Normalsysteme darstellen. In diesen Fällen existiert zwischen den F , Φ und ihren Ableitungen eine Identität der Form

$$\Psi(F_1, F_2, \dots, F_n, \dots, \Phi, \dots, x) = 0,$$

wobei den F und Φ die gleiche Bedeutung zukommt wie früher (vgl. die Besprechung der ersten beiden Abhandlungen des Verf.). Wenn keine Funktionen Φ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, nh + 1$) identisch verschwindet (in welchem Falle die gesuchte Identität bereits gefunden ist), kann man Φ_1 als Linearkombination zwischen den Ableitungen der F_i von der Ordnung $h^{(1)} + 1$ in den unbekannten Funktionen φ_i bestimmen, Φ_2 als Linearkombination zwischen den Ableitungen von Φ_1 und F_i von der Ordnung $h^{(2)} + 1$ in φ_i , schließlich Φ_{nh+1} als Linearkombination zwischen den Ableitungen von Φ_{nh} und F_i von der Ordnung $h^{(nh+1)} + 1$ in φ_i . Durch systematische Steigerung der anfallenden Ordnungszahlen ergibt sich für ein gewisses $h \geq h^{(nh+1)}$ ein Überwiegen der Anzahl der betrachteten Ausdrücke über die Anzahl der Argumente, von denen diese Ausdrücke abhängen, und so der Existenzbeweis der Identität $\Psi = 0$. — Die in Evidenz gesetzte Identität muß nun insbesondere an den Nullstellen der F_i , der Φ_μ und ihrer Ableitungen erfüllt sein, wodurch sich Existenzaussagen über Lösungen der entsprechenden Systeme ergeben. — Die weitere Untersuchung der Linearkombinationen Φ_μ führt auf Ergebnisse, mit deren Hilfe Verf. in Analogie zu den Verhältnissen bei Normalsystemen das Problem der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Ausgangssystems mit vorgegebenen Werten der Funktionen φ und ihrer $h-1$ ersten Ableitungen längs $x^0 = a$ diskutiert. Für die φ und ihre $h-1$ ersten Ableitungen ergeben sich im Rahmen dieses Existenz-

problems $l \geq 1$ Bedingungen, wodurch schließlich eine neue Form des Existenztheorems der Lösungen für eine Klasse derartiger anormaler Differentialsysteme gewonnen werden kann. *M. Pinl* (Köln).

Inzi, A.: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui, comme les systèmes normaux, comportent autant d'équations que de fonctions inconnues. IV. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 351—356 (1947).

Verf. hatte in einer Reihe früherer Untersuchungen (vgl. vorsteh. Reçraté) partielle Differentialsysteme der Ordnung h mit n unbekannten Funktionen q_i in n Gleichungen $F_i = 0$ behandelt. Sind x_0, x_1, \dots, x_m die $m+1$ unabhängigen Veränderlichen des Systems, so handelt es sich um ein Cauchy-Kowalewskisches Normalsystem, wenn das System (eventuell nach vorhergehender Transformation der unabhängigen Veränderlichen) nach den Ableitungen $\frac{\partial^h q_j}{\partial x_0^h}$ aufgelöst werden

kann. Unter Umständen gelingt es, ein anormales System durch weitere Differentiation und geeignete Kombination der Systemgleichungen in ein Normalsystem zu verwandeln. Das gilt z. B. für die in der vorliegenden Note behandelten Bedingungen

$$x_u^2 = g_{11}(u, v), \quad x_u x_v = g_{12}(u, v), \quad x_v^2 = g_{22}(u, v)$$

der Abwickelbarkeit einer Fläche $x(u, v)$ auf eine zweite mit vorgegebener Metrik $g_{\alpha\beta}(n, v)$. Diesem anormalen System kann ein Normalsystem von der Ordnung $nh - h = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ zugeordnet werden, indem man aus dem gegebenen System die Ableitungen

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2} \right), \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{12}}{\partial u}$$

berechnet. Aus dem Existenztheorem (für Normalsysteme) ergibt sich dann: die Fläche ist bereits durch die Kurve $u = 0$ bestimmt. Dies ist nicht der Fall, wenn die Determinante (x_u, x_v, x_{uv}) verschwindet. Dann liegt eine Asymptotenkurve vor, die Form der Fläche ist durch die Anfangsbedingungen nicht mehr bestimmt und die Fläche gestattet Deformationen, bei welchen die Asymptotenkurve invariant bleibt. — Als weiteres wichtiges Beispiel diskutiert Verf. die Einsteinschen Gravitationsgleichungen in der Gestalt $G_{ik} = \frac{1}{2} G g_{ik} = -\kappa T_{ik}$. Der Rang der charakteristischen Determinante des Systems ist hier unter Umständen stärker ausgeartet: $n - t = 6 < n - 1$. Der Untersuchung dieses Beispiels wird daher zunächst eine Verallgemeinerung der Theorie der in Rede stehenden Differentialsysteme auf Fälle stärkerer Rangerniedrigungen als $n - 1$ vorangestellt. Für die Gravitationsgleichungen ergeben sich dann zwei Fallunterscheidungen, je nachdem T_{ik} verschwindet oder nicht. Im ersten Falle gewinnt Verf. die bekannten vier Identitäten zwischen den linken Seiten der Gravitationsgleichungen. Die für die Lösbarkeit des Systems notwendigen Bedingungen erweisen sich dann auch als hinreichend. Durch die Anfangsbedingungen sind die Lösungen des Systems noch nicht eindeutig bestimmt. Die Ergebnisse des Verf. ergänzen vielfach Resultate, die bereits früher von M. Janet gewonnen waren [J. Math. pures appl., IX, s. 8, 339—352 (1929); Ann. Soc. Math. Polon. 5, 38—43 (1927)].

M. Pinl (Köln).

Germy, R. H.: Sur l'intégration par approximations successives de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I, s. 62, 3—10 (1948).

Si tratta di un sistema di equazioni con p funzioni incognite z_1, \dots, z_p delle due variabili x, y , il quale esprime le derivate parziali $\frac{\partial^2 z_j}{\partial x \partial y}$, $j = 1, \dots, p$, linearmente nelle z_1, \dots, z_p e nelle derivate parziali prime di queste. La determinazione di una soluzione z_1, \dots, z_p in un rettangolo $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq \beta$, con la condizione che le z_j si annullino per $x = 0$ e per $y = 0$, viene effettuata con un metodo di approssimazioni successive, la cui convergenza è assicurata dall'esistenza di serie maggiori di tipo esponenziale.

G. Cimmino (Bologna).

Ghizzetti, A.: Un'osservazione sul metodo di Ritz ed applicazione al calcolo della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro circolare eccentrico. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 2, 559—564 (1947).

L'Auteur considère les problèmes

$$(1) \quad \begin{cases} E[v] + \lambda v = 0 & [\text{in } D] \\ L[v] = 0 & [\text{sur } FD] \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} E[u] + \sigma \Theta(X) u = 0 & (\text{in } D) \\ L[u] = 0 & (\text{sur } FD) \end{cases}$$

où $E[v]$ indique une expression différentielle auto-adjointe du deuxième ordre de type elliptique, tandis qu'il est

$$L(v) = \Delta(X) \frac{\partial v}{\partial n'} + \beta(X) v, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0, \quad \alpha \beta \leq 0,$$

avec n' conormal à la FD . — Si l'on appelle v_0, v_1, \dots les fonctions propres du système (1), l'Auteur démontre la convergence de la méthode de Ritz, appliquée au problème

(2), quand l'on approche u avec une combinaison linéaire du type $\sum_{n=0}^N \gamma_n v_n$. —

Ensuite, il fait une application à la détermination approchée de la fréquence fondamentale d'une membrane circulaire avec une ouverture circulaire excentrique, fixe sur le bord externe C_0 et libre sur le bord interne C_1 . Un tel problème est traduit dans le système différentiel

$$(3) \quad \Delta_2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } D, \quad u = 0 \quad \text{sur } C_0, \quad \frac{dv}{dn} = 0 \quad \text{sur } C_1,$$

et par la transformation de Möbius est conduit à l'étude du système:

$$\Delta_2 u + \sigma f(\varrho, \vartheta) u = 0, \quad u(1, \vartheta) = 0, \quad \frac{\partial u(1, \vartheta)}{\partial \varrho} = 0,$$

considéré dans une couronne circulaire. — Le procédé fournit les éléments pour construire une table numérique. — On pourrait se demander encore si le système différentiel (3) exprime en effet le problème de la membrane vibrante fixe sur C_0 et libre sur C_1 . En effet, les (3) supposent la tension constante dans le domaine D et cette hypothèse est en contradiction avec le fait que la tension soit nulle sur C_1 .

G. Grioli (Roma).

Birindelli, C.: Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 2, 269—275 (1947).

L'auteur énonce, sans démonstration, six théorèmes d'existence et d'unicité sur le problème: $\Delta_2 u = f(x, y)$ (pour $0 < y < a$), $\alpha_0 u(x, 0) + \beta_0 u_y(x, 0) = \gamma_0(x)$, $\alpha u(x, a) + \beta u_y(x, a) = \gamma(x)$, relativement à six cas qui peuvent se présenter pour les constantes $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$. Dans chaque théorème les conditions à l'infini qu'on doit imposer à l'inconnue u , à fin que le problème soit déterminé, sont bien précisées. En même temps sont données, au moyen de séries, les formules qui résolvent les problèmes, avec d'hypothèses convenables sur les fonctions $f(x, y)$, $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$.

Aldo Ghizzetti (Roma).

Gevrey, Maurice: Sur le cas irrégulier du problème de la dérivée oblique lorsque le nombre des variables est supérieur à deux. *C. r. Acad. Sci., Paris* 225, 1251—1253 (1947).

Das in der Überschrift genannte Problem wurde vom Verf. für drei und mehr Variable bisher nur im „regulären“ Fall (Richtung der vorgeschriebenen Randableitung ist keine Tangentenrichtung) behandelt (dies. Zbl. 27, 401). In der vorliegenden Note wird kurz über eine Modifikation der dortigen Methode berichtet, die jetzt auch den allgemeinen Fall (Tangentenrichtung zugelassen) durch Zurückführung auf eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art zu behandeln gestattet.

Maruhn (Jena).

Deny, Jacques: Le principe des singularités positives de G. Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine. Rev. sci., Paris 85, 866—872 (1947).

Verf. berichtet über die wesentlichsten Arbeiten aus zwei wichtigen Fragenkomplexen der Theorie der harmonischen Funktionen. Die erste Gruppe enthält zunächst die Untersuchungen von Bocher (1903) und Picard (1923), nach denen eine im Inneren eines Gebietes, abgesehen von einem Punkt, reguläre, auf dem Rande verschwindende Potentialfunktion bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist. Ferner gehören hierher die Arbeiten von Bouligand (1926—1931), der den Ausnahmepunkt auf dem Rande annimmt und untersucht, ob der genannte Satz von Bocher-Picard (Randverschwinden nur bis auf den singulären Punkt) auch jetzt noch gilt (Prinzip der positiven Singularitäten); hierbei zeigt sich, daß dies unter Umständen nicht der Fall zu sein braucht. Der zweite Fragenkomplex betrifft die Verallgemeinerung der Poisson-Stieltjesschen Integraldarstellung positiver harmonischer Funktionen im Kreis auf beliebige Gebiete. Neben Untersuchungen von De la Vallée Poussin [(1933); dies. Zbl. 6, 308], der beschränkte Krümmung des Randes voraussetzt, und von Maria und Martin [(1936); dies. Zbl. 15, 159], die für den Fall allgemeiner Ränder (nicht ganz befriedigende) hinreichende Bedingungen angeben, wird sehr ausführlich über die Arbeit von Martin [(1941); dies. Zbl. 25, 33] referiert, in der das genannte Darstellungsproblem nach Einführung einer geeigneten Metrik vollständig erledigt wird. Maruhn (Jena).

Walker, A. G.: Note on pseudoharmonic functions. II. J. London math. Soc. 22, 101—104 (1947).

L'A. si occupa di proprietà di media analoghe alla classica proprietà di media di Gauss per le funzioni armoniche e valide per funzioni v definite in uno spazio di Riemann a tre dimensioni di curvatura costante. In questa nota si dimostra che se una v è continua insieme con le derivate dei primi due ordini ed è tale che, per tutte le sfere geodetiche S , la media dei suoi valori su S differisce dal suo valore nel centro per un infinitesimo del secondo ordine rispetto al raggio s , detta $\frac{1}{6} \lambda s^2$ la parte principale di tale infinitesimo, la v sarà soluzione dell'equazione alle derivate parziali $\nabla^2 v = \lambda v$.

G. Cimmino (Bologna).

Friedrichs, K. O.: A theorem of Lichtenstein. Duke math. J. 14, 67—82 (1947).

Verf. verallgemeinert zunächst den Begriff des partiellen Differentialquotienten von Funktionen mit $N \geq 2$ Veränderlichen in folgender Weise: Es sei $\Phi(x)$ mit $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ eine L_2 -Funktion (d. h. quadratisch integrabel im Lebesgueschen Sinne) in einem Gebiet R des N -dimensionalen Raumes. Dann besitzt Φ „starke L_2 -Derivierte“ (strong L_2 -derivatives) erster Ordnung $\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)$, wenn eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $\Phi^{(\varepsilon)}(x)$ existiert, so daß $\int_R (\Phi^{(\varepsilon)} - \Phi)^2 dx \rightarrow 0$,

$\int_R \left(\frac{\partial \Phi^{(\varepsilon)}}{\partial x_k} - \Phi_k \right)^2 dx \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $k = 1, \dots, N$. In entsprechender Weise gelangt man zu den starken L_2 -Derivierten zweiter Ordnung Φ_{kl} ; eine „starke Laplace- L_2 -Derivierte“ (strong Laplacian L_2 -derivative) existiert, wenn es eine L_2 -Funktion Φ gibt, so daß neben $\int_R \left(\frac{\partial \Phi^{(\varepsilon)}}{\partial x_k} - \Phi_k \right)^2 dx \rightarrow 0$ auch $\int_R (\Delta \Phi^{(\varepsilon)} - \Delta \Phi)^2 dx \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt.

Es wird nun im wesentlichen Folgendes bewiesen: 1. Es sei $\Phi(x)$ eine L_2 -Funktion in R_0 , die eine starke Laplace- L_2 -Derivierte besitzt. Dann hat Φ in jedem Teilgebiet R starke L_2 -Derivierte zweiter Ordnung; es gilt $\int_R (\Phi_{11} + \dots + \Phi_{NN} - \Delta \Phi)^2 dx = 0$. 2. Ist $\varrho(x)$ eine L_2 -Funktion, so besitzt die Funktion $\Phi(x) = -\Omega_N^{-1} \int_R r^{N-2} \varrho(x) dx$ ($N \geq 2$, Ω_N Inhalt der N -dimensionalen Einheitskugel)

bzw. $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{R}} \log r \varrho(\tilde{x}) d\tilde{x}$ ($N=2$) [$r^2 = (x_1 - \tilde{x}_1)^2 + \dots + (x_N - \tilde{x}_N)^2$] eine starke Laplace- L_2 -Derivierte und dementsprechend starke L_2 -Derivierte zweiter Ordnung; es gilt $\Phi_{11} + \dots + \Phi_{NN} = \varrho$. Diese Sätze können als Verallgemeinerungen der Untersuchungen von Lichtenstein [J. reine angew. Math. **141**, 12—42 (1912)] über die Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials aufgefaßt werden.

Maruhn (Jena).

Variationsrechnung:

Baiada, Emilio: *Sopra un problema non regolare e un problema isoperimetrico del calcolo delle variazioni*. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., II. s. **13**, 59—75 (1948).

Diese Untersuchung, die an zwei Arbeiten von E. J. McShane (dies. Zbl. **20**, 372) anschließt, befaßt sich mit zwei Problemen der Variationsrechnung, einem freien und einem isoperimetrischen. Verf. stellt die Existenz des Minimums für das unvollständig reguläre, positive Integral

$$J_C = \int_0^L F(x, y, x', y') ds \quad \text{mit} \quad F \equiv M \sqrt{x'^2 + y'^2} - (x - y)^2 \sqrt{x'^2 + 8y'^2}$$

fest, wobei (x, y) variieren kann in einem gleichschenkligen Trapez ohne gemeinsame Punkte mit der Geraden $y = x$, mit zur y -Achse paralleler Basis, dessen der Geraden $y = x$ am nächsten gelegene Seite zu dieser Geraden parallel ist. — Verf. gibt im Anschluß an die Methode von Tonelli einen neuen Beweis für die Existenz des Maximums des Integrals

$$\int_C (x - y)^2 \sqrt{x'^2 + 8y'^2} ds$$

auf der Gesamtheit der rektifizierbaren stetigen Kurven, die zwei Punkte der (x, y) -Ebene verbinden und gegebene Länge haben.

S. Cinquini (Pavia).

Pars, L. A.: *A note on the envelope of a certain family of curves*. J. London math. Soc. **22**, 25—31 (1947).

Sotto opportune ipotesi per la funzione f , l'A. estende agli involucri delle famiglie di curve dipendenti da due parametri $\frac{y}{c} = f\left(\frac{x-a}{c}\right)$ una proprietà nota in due casi particolari: per le estremali del problema della superficie di rotazione di area minima e nel problema di una particella che si muove con data energia in un campo uniforme.

S. Cinquini (Pavia).

Shiffman, M.: *Differentiability and analyticity of solutions of double integral variational problems*. Ann. Math., Princeton, II. s. **48**, 274—284 (1947).

Bei den direkten Methoden mehrdimensionaler Variationsprobleme bleibt neben dem Existenzsatz immer noch die Aufgabe, die Differenzierbarkeit und Analytizität der gefundenen Lösung darzutun. Diese Aufgabe wurde begonnen in der klassischen Arbeit von S. Bernstein über den analytischen Charakter der Lösungen von elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wenn von der Lösung bekannt ist, daß sie stetige dritte Ableitungen besitzt. Letztere Voraussetzung ist nach und nach von Lichtenstein, E. Hopf und Morrey reduziert worden. Verf. gibt eine einfache Methode für die Existenz stetiger und sogar H -stetiger erster Ableitungen der Lösung eines zweidimensionalen Variationsproblems. Die Methode besteht in der Umformung der Variationsbedingung für die Lösung $z(x, y)$ in eine ähnliche Bedingung für die Differenzenquotienten von z . Durch eine passende Wahl der Variation kann ein Analogon der Greenschen Formel für die Differenzenquotienten erhalten werden. Dies führt zu einer Abschätzung des Dirichlet-Integrals der Differenzenquotienten, aus der ihre gleichmäßige Konvergenz gegen stetige Funktionen erhalten wird. Der analytische Charakter von z folgt dann nach E. Hopf, wenn

feststeht, daß die ersten Ableitungen von z einer Hölder-Bedingung genügen. Auch dies zeigt der Verf. in seiner bedeutsamen Arbeit auf Grund der fundamentalen Theoreme von Morrey über das Anwachsen des Dirichlet-Integrals. *E. Hölder.*

Sigalov, A.: Sur les intégrales doubles du calcul des variations dans la forme paramétrique. C. r. Acad. Sci. URSS, II. s. 55, 383—386 (1947).

Die Note handelt von einem Satz über die Halbstetigkeit nach unten von Doppelintegralen

$$T = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} \right)^2 \right\}^{1/2} du^1 du^2,$$

wobei D das quadratische Gebiet: $0 \leq u^1 \leq 1$, $0 \leq u^2 \leq 1$ bedeutet. Von den Funktionen $x^i(u^1, u^2)$ ($i = 1, 2, 3$) wird nur vorausgesetzt, daß sie in D stetig sind und dort fast überall stetige Ableitungen nach u^1 und u^2 besitzen. Bei dem Nachweis der Halbstetigkeit nach unten wird die von L. Tonelli eingeführte Bedingung der Quasiregularität durch die der Konvexität ersetzt. Außerdem wird ein Funktional eingeführt, durch welches der Lebesguesche Inhaltsbegriff einer stetigen Fläche verallgemeinert wird. Das Hauptergebnis ist in der Grenzwertgleichung

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (T_n, F) \geq ({}_0T, F)$$

enthalten. Dabei bedeutet F eine stetige Funktion der Komponenten der drei Vektoren $x = x^1, x^2, x^3$; $\xi = \xi^1, \xi^2, \xi^3$; $\lambda = \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$, durch welche bei festem x eine zweidimensionale Metrik eingeführt wird, und ${}_0T$ eine stetige Fläche $x(u)$, die in D mit einer bestimmten Orientierung versehen ist. Die Folge der T_n wird durch solche Funktionen $x^i(u)$ erhalten, die in jedem der Dreiecke einer gewissen Unterteilung von D linear in den u sind. Das Ergebnis stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von T. Radò dar [Trans. Amer. math. Soc. 51, 336 (1942)]. *Quade.*

Hove, Léon de: Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 18—23 (1947).

Beim Variationsproblem für das Integral

$$J = \int F(x_\alpha, z_j, p_{j\alpha}) dx_1 \dots dx_\mu$$

($\alpha = 1, \dots, \mu$, $j = 1, \dots, n$, $p_{j\alpha} = \frac{\partial z_j}{\partial x_\alpha}$) lautet die notwendige Legendre-Bedingung: die biquadratische Form

$$(1) \quad F_{p_{j\alpha} p_{k\beta}} \xi_j \xi_k \eta_\alpha \eta_\beta$$

soll positiv semidefinit sein. Als hinreichend für das Bestehen der Extremaleigenschaft im Carathéodoryschen Sinne (Abänderung in einer Umgebung des betrachteten Punktes der Extremalen liefert größeren Wert für J) gab man bisher an, es solle in dem Büschel

$$(2) \quad F_{p_{j\alpha} p_{k\beta}} \omega_{j\alpha} \omega_{k\beta} + \lambda_{j\alpha, k\beta} (\omega_{j\alpha} \omega_{k\beta} - \omega_{k\alpha} \omega_{j\beta})$$

von quadratischen Formen eine positiv definite vorkommen, was nur für $\mu = 2$ oder $n = 2$ aus der Definitheit von (1) schon folgt. Verf. beweist mit Hilfe einer Fouriertransformation, daß (für beliebiges μ und n) aus der Definitheit von (1) die Extremaleigenschaft folgt, und macht so die Betrachtung des Büschels überflüssig. (Hierdurch ändert sich jedoch nichts an den Resultaten des Ref. [Math. Z. 46, 720—742 (1940); dies. Zbl. 23, 332], wonach man bei Problemen mit beweglichem Rand u. U. auf die ursprüngliche Carathéodorysche Theorie — in der eine Form (2) mit bestimmten Zahlen $\lambda_{j\alpha, k\beta}$ auftritt — zurückgreifen muß.) *Boerner.*

Integralgleichungen:

Crum, M. M.: On an integral equation of Chandrasekhar. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **18**, 244—252 (1947).

Es handelt sich um die Integralgleichung

$$\frac{1}{H(z)} = 1 - \int_0^1 \frac{z}{z+t} H(t) d\alpha(t).$$

Unter der Annahme, daß $\int_0^1 |d\alpha(t)|$ endlich ist und $\int_0^\delta |d\alpha(t)| \rightarrow 0$ mit $\delta \rightarrow 0$, existiert eine für $0 \leq t \leq 1$ beschränkte Lösung, die für gewisse z durch

$$\log H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \log A(\omega) \frac{2z^2}{z^2 - \omega^2} d\omega$$

gegeben ist, wobei $A(z) = 1 - \int_0^1 \frac{2z^2}{z^2 - t^2} d\alpha(t)$

ist und C eine Kurve bedeutet, die vom Nullpunkte aus zunächst längs der positiven imaginären Achse und dann unter Vermeidung der Singularitäten des Integranden ins Unendliche geht. Hat $A(z)$ keine Nullstelle, so ist $H(z)$ eindeutig bestimmt; sonst erhält man die verschiedenen Lösungen durch Änderung von C .

W. Schmeidler (Berlin).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Eberlein, W. F.: Weak compactness in Banach spaces I. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 51—53 (1947).

L'Au. démontre un résultat assez inattendu: étant donné un espace de Banach E , pour qu'une partie M de E soit bicomacte pour la topologie faible, il suffit que M soit fermée et compacte pour cette topologie (c'est-à-dire que toute partie infinie de M ait au moins un point d'accumulation). La démonstration utilise les résultats les plus profonds de Banach sur la topologie faible.

J. Dieudonné (Nancy).

Castoldi, L.: Operatori lineari nello spazio Hilbertiano suscettibili di riduzione a forma normale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. **2**, 141—146 (1947).

Unter Außerachtlassung sämtlicher Konvergenzschwierigkeiten bringt die Arbeit eine Zusammenstellung bekannter Tatsachen über Hermitesche, antihermitesche und unitäre Operatoren und über deren Spektraldarstellung. Bewiesen wird nichts.

Schmeidler (Berlin).

Fichera, G.: Sui funzionali continui con la metrica di Frechet. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. **2**, 174—177 (1947).

Soit H l'espace des fonctions φ de carré sommable dans un ensemble mesurable E de l'espace à r dimensions, avec $m(E) \leq +\infty$. Dans H on adopte la métrique de Fréchet. Soient, d'autre part, S_R , FS_R les sous-ensembles de H qui sont définies respectivement par $\int_E \varphi^2(x) dx \leq R^2$, $\int_E \varphi^2(x) dx = R^2$. L'auteur démontre le théorème suivant: si $J[\varphi]$ est une fonctionnelle continue en S_R , le maximum et le minimum de $J[\varphi]$ sur S_R (qui existent d'après un théorème connu) coïncident respectivement avec la borne supérieure et la borne inférieure de $J[\varphi]$ sur FS_R . La démonstration met en évidence que, avec la métrique adoptée, FS_R est dense en S_R .

Aldo Ghizzetti (Roma).

Povžner, A.: Über eine allgemeine Umkehrformel vom Plancherelschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. **57**, 123—125 (1947) [Russisch].

In einem Hilbertschen Raume (H. R.) H sei ein solcher linearer, in H dichter Unterraum H_0 gegeben, daß auf jedes Element $f \in H_0$ ein gewisser beschränkter Operator A_f bezogen ist. Die Gesamtheit der A_f genüge folgenden Forderungen:

1. $A_f g = \alpha A_f + \beta A_g$ bei beliebigen komplexen α, β . — 2. $A_f A_g = A_g A_f$. — 3. Wenn $f, g \in H_0$, so $A_f g = A_g f \in H_0$, wo $A_f g$ das Ergebnis der Wirkung von A_f auf g . — 4. Es gebe ein solches $e \in H_0$, daß $A_e = E$ der Einheitsoperator ist. — 5. Es gebe in H_0 einen solchen linearen Unterraum T_0 , daß $A_t, t \in T_0$, ein Hermitescher Operator und jedes $h \in H_0$ in der Form $h = t_1 + i t_2, t_1, t_2 \in T_0, i = \sqrt{-1}$ darstellbar ist. — Normt man die Elemente von H_0 durch die Vorschrift $\|h\|_1 = \|A_h\|$, so erweist sich die Abschließung von H_0 nach der Norm $\|\cdot\|_1$ als ein linearer Unterraum $\tilde{R} \subset H$, der gleichfalls die Eigenschaften 1. bis 5. besitzt. Wenn man in ihm die Malnahme durch $f \circ g = A_f g$ erklärt, wird \tilde{R} ein kommutativer genormter Ring, isomorph zum Ringe $C(\mathfrak{M})$ aller stetigen Funktionen auf der Menge \mathfrak{M} seiner maximalen Ideale. Mit diesen Begriffen und Namen gilt Satz I: In \mathfrak{M} gibt es eine solche positive, auf Borelschen Mengen vom Maße ω vollständig additive Funktion, daß das ω -Maß der offenen Menge von 0 verschieden ist. H sich maßgleich auf den H. R. \tilde{H} aller Funktionen $f(M)$ mit einem in bezug auf $d\omega$ integrierbaren Quadrat des Betrages abbildet und die Formel gilt

$$(1) \quad (A_f g, r) = \int_{\mathfrak{M}} f(M) g(M) r(M) d\omega, \quad f, r, g \in \tilde{R}.$$

Von hier aus kommt Verf. bei einer Abelschen Gruppe G zu der Plancherelschen Formel (P. F.) über einen zweiten Satz, zu dessen Fassung es folgender Begriffe bedarf: \mathfrak{N}_0 sei die Gesamtheit aller auf G in bezug auf $d\tau$ betragslich integrierbaren Funktionen, die außerhalb einer gewissen Umgebung der Einheit mit bikompakter Abschließung verschwinden. τ ist ein invariantes Maß. Verf. stellt eine solche a) gerade Funktion $h(x)$ her, daß b) $\int_G h(x) \chi(x) d\tau(x) \neq 0$ bei beliebigem Charakter χ von G , c) aus $(A_h g, g) = 0$ stets $g = 0$ folgt, d) $h = A_\lambda f$, wenn $f \in \mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1$ bedeute $\{A_h f_s\}$, wo $f \in \mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1$ ist in H dicht. \mathfrak{N} bedeute $\{A_h f_s + \lambda h = s\}$, wo $f_s \in \mathfrak{N}_0$, mit komplexem λ und \mathfrak{N}_1 die Abschließung von \mathfrak{N}_1 . Dann kommen der Gesamtheit der $A_s = A_{f_s} + \lambda E$ die Eigenschaften 1. bis 5. zu. Wendet man auf sie den Satz I mit den früher benutzten, sinngemäß abgewandelten Zeichen an, so ergibt sich der Satz II: Wenn $M \subset \mathfrak{M}, M \neq \mathfrak{N}_1$ und $s \in \mathfrak{N}_1$, so ist

$$(2) \quad s(M) = \frac{1}{\gamma(\chi)} \int_G s(x) \chi(x) d\tau(x),$$

mit einem gewissen Charakter $\chi(x)$ von G und $\gamma(\chi) = \int_G h(x) \chi(x) d\tau(x)$. Umgekehrt erklärt jeder Charakter durch (2) ein maximales Ideal. — (1), mit $f = e$ angesetzt, und (2) führen auf bekanntem Wege zu der P. F. — L. Koschmieder (Graz).

Povzner, A.: Über das Spektrum der beschränkten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II, S. 57, 755—758 (1947) [Russisch].

Angeregt durch eine Arbeit von A. Beurling [Acta math., Uppsala 77, 127—136 (1945)] gibt Verf. erstens eine neue Erklärung des Spektrums einer auf der ganzen Achse beschränkten stetigen Funktion $q(x)$. Es sei: L_1 der Raum der Funktionen f mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$; S der Raum der Funktionen $q(x)$; P die Klasse der Funktionen $p(x)$ von folgender Art: 1. $p(-x) = p(x) > 0$. 2. $p(x)$ ist stetig und nimmt bei $x \rightarrow 0$ nicht ab. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$. 4. Wenn $x, \tau > 0$, so gibt es eine Funktion $M(\tau)$, so daß $p(x + \tau) \leq M(\tau) p(x)$. Es bedeute D_p den Raum S mit der Maßbestimmung $\|q\| = \sup_{|x| < \infty} \frac{|q(x)|}{p(x)}, p \in P$. Ein linearer Raum $T \subset S$ heiße p -invariant, wenn er in D_p abgeschlossen ist und aus $q(x) \in T$ folgt, daß $q(x + \tau) \in T$ bei beliebigem τ . Diese Eigenschaften hat T genau dann, wenn aus $h(t) \in L_1, q(t) \in T$ folgt, daß $\int_{-\infty}^{\infty} q(t - x) h(x) dx = h * q = q \in T$. Ist T ein p -invarianter Raum

(p -i. R.), der mit S nicht zusammenfällt, so gibt es zu jedem in T nicht enthaltenen $f \in S$ und zu $\varphi(t) \in T'$ eine solche Funktion $h \in L_1$, daß $h \circ f(0) \neq 0$ und $h \circ \varphi(0) = 0$ ist. — Es sei $\varphi \in S$, $h \in L_1$; dann gilt $h \circ \varphi(x) \in S$. $H(T)$ bezeichne die Gesamtheit der Elemente h von L_1 , die $h \circ \varphi(x) = 0$ machen bei beliebigem $\varphi \in T$. Erklärt man die Multiplikation von h_1 mit h_2 in L_1 durch $h_1 \circ h_2$, so ist $H(T)$ ein abgeschlossenes Ideal im Ringe L_1 . $H(T)$ ist nicht leer, wenn T ein p -i. R. und $T \neq S$ ist. Wenn T p -i. und $\varphi \circ h = 0$ ist bei beliebigem $h \in H(T)$, so gilt $\varphi \in T$. Die Abschließung $T_{\varphi, p}$ der linearen Hülle der Funktion $\varphi(x + \tau)$ in der Maßbestimmung D_p ist ein p -i. R. Als p -Spektrum der Funktion φ bezeichnet Verf.

jetzt die Menge $\mathfrak{N}_{\varphi, p}$ der Werte λ mit der Eigenschaft $A = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda i t) h(t) dt = 0$ bei beliebigem $\lambda \in H(T_{\varphi, p})$. Gehört λ dem p -Spektrum von φ an, so gilt $\exp(\lambda i x) \in T_{\varphi, p}$. Das p -Spektrum einer beliebigen Funktion $\varphi \in S$ ist nicht leer. Beweis mit Hilfe eines Wienerschen Satzes von Tauberscher Art. — Der Durchschnitt \mathfrak{N}_{φ} aller Mengen $\mathfrak{N}_{\varphi, p}$ ($p \in P$) ist nicht leer; es läßt sich ein $q \in P$ finden, so daß $\mathfrak{N}_{\varphi} = \mathfrak{N}_{\varphi, q}$ ist. \mathfrak{N}_{φ} soll das H.-B.-Spektrum von φ heißen. Wenn λ ihm angehört, so gehört $\exp(\lambda i t)$ der Abschließung der linearen Hülle der Funktion $\varphi(t + \tau)$ in beliebiger Maßbestimmung D_p an. — Verf. behandelt zweitens die Frage A, ob sich eine gegebene Funktion $q \in S$ in beliebigem D_p durch eine Folge trigonometrischer Summen (t. S.)

$$\sigma_{n, p} = \sum_{k=1}^{m_{n, p}} C_{n, p}^k \exp(i \lambda_{k, n, p} t), \quad \lambda_{k, n, p} \in \mathfrak{N}_{\varphi},$$

annähern lasse? Vorbereitungen auf die Antwort: \mathfrak{N} sei eine abgeschlossene Menge reeller Zahlen, $H_{\mathfrak{N}}$ das Ideal aus L_1 , das aus allen Funktionen h mit verschwindendem Werte von A besteht, wo $\lambda \in \mathfrak{N}$. Es sei $\mathfrak{N}(J)$ die Menge der Werte λ , für die A bei beliebigem $h \in J$ verschwindet; J ist ein Ideal aus L_1 . Die Gesamtheit der Funktionen $h \in L_1$, für die $h \circ \varphi = 0$ ist, heiße H_{φ} ; es ist dann $\mathfrak{N}_{\varphi} = \mathfrak{N}(H_{\varphi})$. — Die Antwort selbst: A ist gerade dann zu bejahen, wenn $H_{\varphi} = H_{\mathfrak{N}_{\varphi}}$. — A hängt eng mit einer allgemeinen Frage T von Tauberscher Art zusammen, — ob ein gegebenes abgeschlossenes Ideal $J \subset L_1$ sich mit $H_{\mathfrak{N}(J)}$ decke? —: Wenn T zu bejahen ist, so auch A, und umgekehrt (Satz A-T). — Hahn-Bochnersches Spektrum der Funktion φ heiße die Menge der Werte λ ohne eine Umgebung Δ_{λ} , in der sich die zweite verallgemeinerte Fouriersche Transformierte $E(\lambda)\varphi$ von φ als lineare Funktion erwiese. Mit diesem Spektrum deckt sich das H.-B.-Spektrum. — Ist $\lambda \in \mathfrak{N}_{\varphi}$ und Δ_{λ} eine gewisse Umgebung der Stelle λ , so ist es nicht möglich, φ in beliebigem D_p durch t. S. anzunähern, deren Exponenten in Δ_{λ} nicht enthalten sind. Zu diesem verneinenden Satze gibt Verf. auch ein bejahendes Gegenstück an. — Der Beweis des Satzes A-T beruht darauf, daß die Zugehörigkeit der Funktion φ zu $T_{\varphi, p}$ durch $H_{\varphi} \subset H_{\varphi}$ gekennzeichnet ist. Daraus folgt, daß die Beziehungen $\varphi \in T_{\varphi, p}$ und $\varphi \in T_{\varphi, p}$ dann und nur dann gleichzeitig bestehen, wenn $H_{\varphi} = H_{\varphi}$ ist. — Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich auf den Fall beschränkter meßbarer und potenzhaft wachsender Funktionen verallgemeinern.

Koschmieder (Graz).

Lozinskij, S. M.: Die Räume \tilde{C}_{ω} und \tilde{C}_{ω}^* und die Konvergenz von Interpolationsprozessen in ihnen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 1389—1392 (1948) [Russisch].

$f(x)$ sei reell und stetig; $f(x + 2\pi) = f(x)$. \mathfrak{M} sei ein System von Zahlen $x_i^{(n)}$ ($0 < i \leq 2n + 1 < \infty$), und $U_n(x) = U_n(\mathfrak{M}, f, x)$ das an den Stellen $x = x_i^{(n)}$ ($i = 1, \dots, 2n + 1$) mit $f(x)$ übereinstimmende trigonometrische Polynom höchstens n -ten Grades. Es werden (ohne Beweise) Bedingungen für $U_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ auf-

gestellt; nach Bernstein und Faber besteht die Konvergenz bei festem \mathfrak{M} niemals für alle f . Der Funktion $f(x)$ wird ihr „Stetigkeitsmaß“ $\omega(u) = \omega(u, f) = \max_{|x-y| \leq u} |f(x) - f(y)|$, der Matrix \mathfrak{M} eine Zahlenfolge $A_n(\mathfrak{M})$ zugeordnet; A_n berechnet sich aus

$x_1^{(n)}, \dots, x_{2n+1}^{(n)}$. (Nach S. N. Bernstein ist stets $A_n > A \ln n$ mit festem A .) Zu gegebenem $\omega(u) = \omega(u, g)$ wird der Raum \tilde{C}_ω definiert als Menge aller f mit $|f(x+h) - f(x)| \leq c(f) \cdot \omega(h)$; \tilde{C}_ω^* ist die Menge der f mit $\omega(f, h) \cdot \omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Eine mittels ω definierte Norm macht \tilde{C}_ω^* zu einem separablen, \tilde{C}_ω zu einem nicht-separablen Banachschen Raum. Wenn nun $\omega(u)$ eine gewisse Bedingung (A) erfüllt, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\mathfrak{M}) \omega(1/n) = 0$ notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes f aus \tilde{C}_ω^* gleichmäßig in x $U_n(x) \rightarrow f(x)$ gilt; im anderen Falle gibt es sicher keine solche allein durch $A_n(\mathfrak{M})$ und ω ausdrückbare Bedingung. (A) besagt im wesentlichen, daß $\omega(u)$ bei $u \rightarrow 0$ nicht stärker als $-1 \ln u$ gegen Null geht. Ein ähnlicher Satz gilt für \tilde{C}_ω^* . — Für die Interpolation mittels gewöhnlicher Polynome wird die Gültigkeit analoger Resultate mit einer angegebenen anderen Formulierung von (A) behauptet.

Wecken (Haltingen, Kr. Lörrach).

Wintner, A.: A class of Weierstrass bases. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 18, 209—214 (1947).

Es sei $\varphi(t)$ eine gerade periodische Funktion mit der absolutkonvergenten Fourierreihenentwicklung $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Hat das unendliche Gleichungssystem

$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x_{nm} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) keine nichttriviale Lösung x_i mit $x_i \leq M, i = 1, 2, \dots$,

so ist jede in $[0, \pi]$ stetige Funktion gleichmäßiger Limes von endlichen Linearkombinationen der Funktionen $1, \varphi(t), \dots, \varphi(nt), \dots$. Dies ist speziell der Fall,

wenn $a_1 \neq 1$, die b_i durch $a_1 b_1 = 1, \sum_{d|n} a_{n/d} b_d = 0$ ($n = 2, 3, \dots$) bestimmt sind und

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nt$ eine absolut konvergente Fourierreihe ist. Ein $q(t)$, das die Bedingung

erfüllt, ist z. B. die nirgendsdifferenzierbare stetige Funktion $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cos 2^k t$.

G. Köthe (Mainz).

Praktische Analysis:

Andersen, Einar: Solution of great systems of normal equations together with an investigation of Andrae's dot-figur. København: Geodætisk Instituts Skrifter, 3. Reihe, Bd. XI. 1947. 65 S.

Bodewig, E.: Bericht über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. V. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 211—219 (1948).

Unmittelbar an die vierte Mitteilung (dies. Zbl. 29, 148) anschließend, wird eine dritte Methode der Konvergenzverbesserung angegeben. Man beseitigt bzw. verkleinert durch Multiplikation mit den entsprechenden Unterdeterminanten bzw. Näherungen dieser Größen und Addition der betreffenden Gleichungen störende Glieder.

Als letztes wird das vom Verf. als modifiziertes Gaußsches Verfahren bezeichnete behandelt. Der nach dem Gaußschen Verfahren berechnete Vektor r wird vor allem bei großem n infolge Abrundungsfehler usw. ungenau, so daß er in die gegebenen Gleichungen eingesetzt, diese nicht genau erfüllt, sondern daß sich Fehler f_1, f_2, \dots, f_n ergeben. Diese nimmt man anstatt der konstanten Glieder und berechnet einen Korrekturvektor p von r . Bei dieser Berechnung bleibt die linke Seite unverändert. Einsetzen und Berechnung von p fordern $2n^2$ Multiplikationen und ebenso viele Additionen mehr; das Verfahren ist also nach Ansicht des Verf. immer noch ökonomischer als andere Methoden, z. B. die von Schur. Verf. kommt damit zu dem Endergebnis, daß die Iterationsmethoden nur in seltenen Ausnahmefällen zu emp-

fehlen sind, daß das Gaußsche Verfahren evtl. mit Iteration rechentechnisch das vorteilhafteste ist.

In einem ersten Anhang wird der Beweis von Andersen, daß die Methode von Cholewsky auf dieselben Gleichungen führt wie die von Gauß, mit den hier benutzten Bezeichnungen wiederholt. Jede Zeile der Cholewskischen Dreiecksmatrix ist der entsprechenden von Gauß proportional; Proportionalitätsfaktor ist die Wurzel aus dem Diagonalelement der Gaußschen Matrix. Im zweiten Nachtrag wird das Morrissche Treppenverfahren behandelt. Hier ist die Zahl der erforderlichen Multiplikationen $n/4$ mal so groß als beim Gaußschen Verfahren. Es ist daher rechentechnisch wenig günstig.

Willers (Dresden).

●Hartree, D. R.: *Calculating machines*. Cambridge: At the University Press, New York: The Macmillan Company. 1947. 40 p. \$ 0.75.

Comrie, L. J.: *Rechenkunst in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft*. Übersetzt aus „Future“, Overseas number 1947. Nr. 1 von J. M. Vinter Hansen. Nordisk. astron. Tidsskr. 1948, Nr. 1, 1—17 [Dänisch.]

Die Entwicklung der Rechenmaschinen einschließlich der modernsten; ihre Arbeitsweise und die mit ihnen gegenwärtig und voraussichtlich in der Zukunft zu behandelnden Aufgaben werden besprochen (vgl. dies. Zbl. 29, 56). Nyström.

Bergman, Stefan: *Punch-card machine methods applied to the solution of the torsion problem*. Quart. appl. Math. 5, 69—81 (1947).

Die Torsion eines Balkens konstanten Querschnittes führt nach St. Venant auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Die Lösung derselben wird gemäß einer früheren Arbeit des Verf. (Partial differential equations. Mimeographed lecture notes, Brown University, Providence 1941 u. Sur les fonctions orthogonales. Interscience Publishers, New York, 1941) mit Hilfe eines Systems normierter orthogonaler Polynome im Querschnitt B des Balkens durchgeführt. Die Berechnung dieser Polynome und die Darstellung der gesuchten Potentialfunktion $H(x, y)$ durch dieselben führt auf gewöhnliche Integrationen, die für die numerische Berechnung durch Summation ersetzt werden, und auf die Berechnung von Determinanten. Es wird gezeigt, wie alle Rechnungen mit Hilfe der Lochkartenmaschinen durchgeführt werden können. — Bei Verwendung nur endlich vieler Polynome soll die Approximation H^* verbessert werden, indem man für einen B nebst Rand umfassenden Bereich M solche Potentialfunktionen $f(x, y)$ bestimmt, die je in einem kleinen Teilintervall des Randes von M endlich sind oder an einer Stelle des Randes einen Pol haben und im übrigen auf dem Rande von M verschwinden. Die Bestimmung einer Linearkombination L von $f(x, y)$ so, daß an passend gewählten Stellen auf dem Rande von B die Randbedingung für $H^* + L$ genau erfüllt ist, führt auf ein lineares Gleichungssystem, das ebenfalls mit Hilfe der Lochkartenmaschinen gelöst wird. — Genannte Methode ist ebenfalls für die Lösung anderer Randwertprobleme zu verwenden, z. B. für die biharmonische Differentialgleichung dünner Platten. Hans Richter (Haltingen, Kr. Lörrach).

●Pollak, L. W. and C. Heilfron: *Harmonic analysis and synthesis schedules*. Department of Industry and Commerce (Eire), Meteorological Service Geophysical Publications, Vol. I. Stationery Office, Dublin 1947. XXXII, 118 p.

●Allen, Edward, S.: *Six-place tables: a selection of tables of squares, cubes, square roots, cube roots, fifth roots and powers, circumferences and areas of circles, common logarithms of numbers and of the trigonometric functions, natural logarithms, exponential and hyperbolic functions, and integrals. With explanatory notes*. 7. ed. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1947. XXIII, 232 p. 12 s. 6 d.

●Five-figure tables of trigonometrical functions. Prepared by H. M. Nautical Almanac Office, London, 1947.

● **Tables of spherical Bessel functions.** Prepared by the Mathematical Tables Project, National Bureau of Standards. Columbia University Press 1947. XXVIII, 375 p. \$ 7.50.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Statistik:

● **Kenney, John F.: Mathematics of statistics. I.** 2. ed. New York: D. Van Nostrand Co., Inc.; London: Macmillan and Co., Ltd. 1947. XII, 260 p. 21 s. net.

● **Hays, Samuel: An outline of statistics.** 3. ed. London, New York and Toronto: Longmans Green and Co., Ltd. 1947 254 p. 8 s. 6 d. net.

Sá da Costa, A. M.: Statistische Klassifikation. Rev. Economia, Lisboa 1, 26—28 (1948) [Portugiesisch].

Elementare Entwicklungen über absolute und relative Merkmalshäufigkeiten, die z. B. aus der Bedingung der Unabhängigkeit der Merkmale A und B zum Multiplikationssatz $\frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$ führen. Vgl. G. N. Udny Yule: An introduction to the theory of statistics, 6. ed. 1922 Chapter III und E. Czuber: Die statistischen Forschungsmethoden (1921), S. 2. Lorcy (Frankfurt a. M.).

Quenouille, A large-sample test for the goodness of fit of autoregressive schemes. J. R. statist. Soc., London 110, 123—129 (1947).

Zur Prüfung der erzielten Anpassung bei autoregressiven Schemata gibt Verf. einen Test an, der auf der Verwendung eines gewogenen Mittels aus den beobachteten Autokorrelationskoeffizienten beruht, welches für große Stichprobenumfänge normal um Null verteilt ist. Ferner zeigt er, wie sich mit Hilfe dieses Mittelwertes eine Überlagerung feststellen läßt. An konstruierten Reihen und an Reihen aus der Erfahrung wird die Anwendung und die Brauchbarkeit des Tests dargelegt. *Fricde.*

Pearson, E. S.: The choice of statistical tests illustrated on the interpretation of data classed in a 2×2 table. Biometrika, Cambridge 34, 139—163 (1947).

Einleitende Betrachtung über die notwendige Vorsicht bei der Wahl der Bedeutungsprüfmethode im konkreten Falle und bei den aus ihren Ergebnissen zu ziehenden Schlüssen. Die Aufstellung einer Prüfmethode geschieht vom logischen Standpunkte aus in 3 Schritten: 1. Feststellung aller möglichen Ergebnisse bei Wiederholung des Versuches. 2. Überziehung des in 1. erhaltenen Resultatfeldes mit Linien L , bei deren Überschreitung die zu prüfende Hypothese unwahrscheinlicher wird. Die Wahl dieser Linien ist oft nicht eindeutig möglich. 3. Anheftung einer Zahl ϵ an jede Linie, die die Wahrscheinlichkeit angibt, daß ein Ergebnis jenseits der Linie liegt. — Durchführung dieser Schritte für die drei von Barnard (dies. Zbl. 29, 156) eingeführten Typen I bis III der 2×2 -Tafel. Für I entsteht die bekannte Fishersche Methode. Für II wird eine neue Möglichkeit der Festlegung der Linien L angegeben, die darauf beruht, daß man in dem zweidimensionalen Resultatfeld auf allen Geraden konstanter Marginalien der 2×2 -Tafel die Prüfungsmethode I anwendet. In beiden Fällen I und II kann für nicht zu kleine Werte der Anzahlen n_1 und n_2 der Versuchsobjekte für die beiden zu vergleichenden Bearbeitungsweisen, Heilmethoden o. ä. eine gute Approximation mit Hilfe einer Annäherung der die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Versuchsergebnisse angegebenden hypergeometrischen Theorie durch eine Gaußsche Normalverteilung durchgeführt werden. Die Bedeutungsprüfung wird dann äquivalent mit der Anwendung der χ^2 -Methode. Die für Fall II angegebene Methode der Fixierung der Linien L kann auch auf Fall III Anwendung finden, wo der Resultatraum dreidimensional ist, wenn man bei ihm in den Ebenen der für Fall II konstanten Marginalien n_1 und n_2 die Methode II anwendet. Für nicht zu kleine Werte von $n_1 + n_2$ kann ebenfalls die obige Approximation durchgeführt werden, was wieder die χ^2 -Methode liefert. — Im Anhang 2 Tafeln

über die Abweichungen der hypergeometrischen Therme von der Gaußschen Kurve. — Bem. d. Ref.: Aus der Pearsonschen Konstruktion der Linien L folgt unmittelbar, daß der zu jedem Resultatpunkt erhaltene Wert von ε nur wegen der Diskretheit des Resultatfeldes von dem entsprechenden Wert bei der Fisherschen Methode abweicht, und zwar um so mehr, je kleiner n_1 und n_2 sind, in welchem Falle sich aber sowieso eine zu große Genauigkeit in der Angabe von ε verbietet. Für die praktische Anwendung ist daher die Pearsonsche Methode mit der Fisherschen identisch. Die Einwände gegen die letztere gelten also auch für die Pearsonsche im Gegensatz zu der Konstruktion von Barnard (l.c.), die wesentlich Neues bietet. *Hans Richter*.

Uven, M. J. van: Extensions of Pearson's probability distributions to two variables. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 1152—1264 (1947).

Die Natur der in Teil I der Arbeit (dies. Zbl. 29, 156) eingeführten, auf zwei Variable verallgemeinerten Pearsonschen Verteilungsfunktionen $\varphi(x, y)$ hängt ab von der Struktur der Nenner G und H . Zur Auswertung der Integrabilitätsbedingung

$$HP_y - GQ_x = \frac{H}{G} PG_y - \frac{G}{H} QH_x$$

werden im § 2 mit Unterteilung nach der Reduzibilität von G und H die Fälle unterschieden (A, B, C, D sind lineare Funktionen):

I. G und H ohne gemeinschaftlichen Faktor: $\varphi = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$, wo φ_μ gewöhnliche Pearsonsche Funktionen sind. — II. G und H quadratisch mit einem gemeinsamen Faktor: a) $\varphi = K_0 \cdot A^{\mu_1} \cdot B^{\mu_2} \cdot C^{\mu_3}$ oder b) $\varphi = K_0 \cdot A^{\mu_1} \cdot B^{\mu_2} \cdot \exp(D/A)$. —

III. $G \equiv H$ quadratisch: a) $\varphi = K_0 \cdot G^{\mu}$ oder b) $\varphi = K_0 \cdot A^{\mu_1} \cdot C^{\mu_2}$ oder c) $\varphi = K_0 \cdot G^{\mu} \cdot \exp(\lambda \cdot \arctg \frac{A}{y-c})$ oder d) $\varphi = K_0 \cdot A^{\mu} \cdot \exp(D/A)$. — IV. G quadratisch,

H linearer Faktor von G : a) $\varphi = K_0 \cdot e^{-\lambda y} \cdot A^{\mu_1} \cdot B^{\mu_2}$ oder b) $\varphi = K_0 \cdot A^{\mu} \cdot \exp(-\lambda y - B/A)$. — V. $G \equiv H$ linear: $\varphi = K_0 \cdot e^{-\lambda_1 y - \lambda_2 x} \cdot C^{\mu}$. — VI. $G \equiv H \equiv 1$: Gaußsche Verteilung. — Diese Typen werden in § 3 durch andere Wahl von Nullpunkt und Maßstab standardisiert und die „natürlichen Grenzen“ aufgesucht, wo $\varphi G = \varphi H = 0$ ist. Berechnung der niedrigsten Potenzmittelwerte, Schiefheits- und Exzeßmaße gemäß den Formeln von § 1.

Hans Richter (Haltingen, Kr. Lörrach).

Uven, M. J. van: Extension of Pearson's probability distributions to two variables. III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 41—52 (1948).

Fortsetzung des § 3 von Teil II (s. vorsteh. Referat). In § 4 wird untersucht, welche der in § 2 eingeführten Typen Spezialfälle von anderen sind. Berechnung der Mittelwerte von x und y . Die Stelle $P = Q = 0$ des Maximums von φ stimmt nur bei einigen Typen mit dem Mittelwert überein. Die Projektion der Kurve der parabolischen Punkte von $\varphi(x, y)$, falls solche existieren, in die xy -Ebene ergibt eine biquadratische Kurve oder einen Kegelschnitt, symmetrisch zum Maximum: Verallgemeinerung der Eigenschaft der Pearsonschen Kurven, daß das Maximum in der Mitte zwischen den Wendepunkten liegt. *Hans Richter* (Haltingen).

Uven, M. J. van: Extension of Pearson's probability distributions to two variables. IV. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 191—196 (1948).

In § 5 werden die totalen Wahrscheinlichkeitsdichten $W_x = \int \varphi dy$ und $W_y = \int \varphi dx$ für die als die geeignetsten zu betrachtenden Typen I, IIa, IIb, IIIa, IVa und VI in der Standard-Form des § 3 berechnet; das Ergebnis sind Pearsonsche Kurven. — Zur Approximation einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung durch ein $\varphi(x, y)$ kann zunächst durch die Berechnung von W_x und W_y geprüft werden, welches φ in Frage kommt und mit welchen Parametern. Vergleich der Korrelationskoeffizienten, Mittelwerte, Schiefheits- und Exzeßmaße von φ mit denen der gegebenen Verteilung zeigt die Genauigkeit der Approximation. *Hans Richter*.

Biomathematik. Versicherungsmathematik:

Knudsen, Lila F. and Jack M. Curtis: The use of the angular transformation in biological essays. J. Amer. statist. Assoc. 42, 282—296 (1947).

Es wird eine einfache Methode, die „Winkeltransformation“, zur Auswertung von Resultaten biologischer Versuche angegeben. Ein Vergleich mit der sogenannten „Probit-Methode“ ergibt, daß die Abweichungen nur ganz gering sind, dagegen die „Probit-Methode“ zur Durchrechnung ungefähr die zwölfwache Zeit erfordert, daher ist die Winkeltransformation besonders für Laboratorien sehr geeignet. *Kraus*.

Le Heux, J. W. N.: The growth-curve. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 1201—1213 (1947).

In vielen Fällen ist das Wachstum eines Organismus N definiert durch die Gleichung $\frac{dN}{dt} = BN \left(1 - \frac{N}{A}\right)$. A ist der konstante Maximalwert von N , der von der Ernährung und anderen Bedingungen abhängt und bedingt ist durch die Umgebung des wachsenden Organismus. B drückt die spezifische Geschwindigkeit des Wachstumsprozesses aus. Im allgemeinen hat es den konstanten Wert b , aber manchmal ist eine schwache Änderung während einer bestimmten Periode des Wachstumsprozesses möglich. Die Beziehung zwischen N und t (b const.) ist $N = A \frac{eb(t-t_1)}{1 + eb(t-t_1)}$. t_1 ist die Zeit, in der der halbe Maximalwert von A erreicht wird. — Um die Wachstumskurve, das „Sigmoid“, zu konstruieren, wird eine graphische Methode angegeben. Diesem Sigmoid entnimmt man die Werte für die Konstanten A , b , t_1 , während N und t experimentell gegeben sind. Gegenüber dem Verfahren von Robertson liegt der Vorteil der beschriebenen Methode darin, daß in jenem die Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden müssen, hier aber graphisch gefunden werden können. *Kraus* (Friedberg/Augsburg).

Costa Miranda, Alfredo da: Die Bildung der mathematischen Reserven. Rev. Economia, Lisboa 1, 30—31 (1948) [Portugiesisch].

Bekannte Gleichungen für das Nettodeckungskapital wie z. B. ${}_kV_k = A_{x+k} - G_x a_{x+k}$. *Lorey* (Frankfurt a. M.).

Grootenboer, B.: Gruppenweise Reservenberechnung, insbesondere für Rentenversicherungen von zwei Leben. Verzekerings-Arch. 27, 99—114 (1947) [Holländisch].

Vergleich der 1939 vorgeschlagenen Annäherungsverfahren für verbundene Leibrenten von Elphinstone und Lindsay (Trans. Fac. Actuaries 17, Nr. 3) und Derrieu (Bull. Trimestr. Inst. Actuaire français 50, 25—35). Bei jener gilt der Ansatz $a_{xy} = \alpha a_{xx} + \beta a_{yy}$, wo die Konstanten α und β von der Sterbetafel und dem Altersunterschied $x - y$ abhängen. Bei dieser geht man von dem Ansatz aus: $a_{xy} = a_x + a_y - a_z$, wo z gemäß der Makehamschen Formel durch $2c^z = c^x + c^y$ bestimmt wird. Mit der Konstanten $\Theta = (z - y)(x - y)$ ergibt sich $a_{xy} \sim (1 - \Theta) a_{xx} + \Theta a_{yy}$. Mit einer englischen und holländischen Sterbetafel hat Verf. für die Alter $x = 20, 30, \dots, 90$ und die Unterschiede $x - y = 0, 1, 5, 10, 12, 20, 24, 30, 50$ und den Rechnungszins 3 und 4% die angeführten Werte mit den genauen Werten tabellarisch zusammengestellt. Die Konstanten α und β hat er auch für die Unterschiede $x - y = 12$ und $= 24$ berechnet. — Beide Annäherungsverfahren erweisen sich als recht geeignet. Nur bei dem abnormen Unterschied $x - y = 50$ ergeben sich größere Unterschiede; z. B. $a_{7020} = 25,248$ genau gegen 25,070 mit dem Θ -Verfahren. — In der an den Vortrag sich anschließenden Aussprache traten u. a. einige für die übliche Berechnung $a_{xy} = a_x + a_y - a_{zz}$ ein; doch gingen die Meinungen über dieses Verfahren auseinander. *Lorey* (Frankfurt a. M.).

Kok, C. L.: Der Zinsanteil der Lebensversicherung. Verzekerings-Arch. 27, 79—94 (1947) [Holländisch].

Untersuchungen über die Sparprämie, veranlaßt durch die neueren holländischen Steuerverordnungen. Von mathematischem Interesse die Funktionalgleichung

$$q(k+1) = \varphi(k) v \cdot \frac{\delta_k}{1 + s_k} + v \frac{\delta_k - k}{(s_k + 1)^2}.$$

Verf. hat diese für den Rechnungszinsfuß 3 v. H. und die Jahre $k = 1, 5, 10, 20$,

30, 40 berechnet. Im Kopf der Tabelle S. 91 Spalte 2 fehlt das Funktionszeichen. Es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = 0$; das Maximum liegt mit 0,130 ungefähr bei 40. — Aus den abschließenden kritischen zusammenfassenden Bemerkungen des Verf. über das holländische Gesetz kann man eine Parallele zu der einstigen wissenschaftlich unbegründeten gesetzlichen Höchstfestsetzung des Zillmersatzes im deutschen Gesetz erkennen.

Lorey (Frankfurt a. M.).

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Mineur, Henri: Réduction d'une forme quadratique dans le groupe canonique linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 1254—1256 (1947).

Ist $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ eine homogen quadratische Hamiltonsche Funktion, so kann sie im Falle verschiedener Wurzeln der charakteristischen Gleichungen durch kanonische Transformation auf die Form $\sum_1^n \lambda_i p_i q_i$ gebracht werden. Verf. deutet einen Beweis dafür an, daß im allgemeinen Fall H auf eine Summe von Ausdrücken der Form

$$\lambda \sum_1^m q_i p_i + \sum_1^{m-1} q_k p_{k+1}$$

gebracht werden kann. Daraus folgt das Theorem, daß jedes solche H mit n anderen in Involution steht, die auf die Formen

$$f_0 = \sum_1^m q_i p_i, \quad f_1 = \sum_1^{m-1} q_i p_{i+1}, \quad \dots, \quad f_{m-1} = q_1 p_m$$

gebracht werden können.

Hamel (Berlin).

Aezél, John and Stephen Fenýö: On fields of forces in which centres of gravity can be defined. Hung. Acta Math. **1**, 53—60 (1948).

Eine Fragestellung, die aus der Theorie paralleler Kräfte bekannt ist: gegeben sei ein Feld von Beschleunigungsgesetzen. Wann sind sie im Sinne der Stereomechanik bei jeder Massenverteilung einer Kraft in einem Punkt, dem „centre of gravity“ äquivalent? Es wird noch vorausgesetzt, daß für 2 Punkte das Zentrum auf der Verbindungslinie liegt. Die Frage führt auf Funktionalgleichungen, die in der Literatur gelöst vorliegen, und wird zuerst für die Gerade, dann für die Ebene vollständig gelöst.

Hamel (Berlin).

Loury (Luře), A. I.: Investigation of the stability of motion of a dynamic system. Priklad. Mat. Mech., Moskva **11**, 445—448 u. engl. Zusammenfassung 448 (1947) [Russisch].

Verf. untersucht die Bewegungen eines dynamischen Systems, dessen Bewegungsgleichungen $\ddot{\zeta} + 2n\dot{\zeta} + \zeta = \mu$, $\sigma = \zeta + \lambda\dot{\zeta}$, $\dot{\mu} = -\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn} \dot{\sigma})$ lauten ($n > 0$, $\lambda > 0$). Sind ϱ_1, ϱ_2 die beiden Wurzeln der quadrat. Gl. $\varrho^2 - 2n\varrho + 1 = 0$ und werden neben σ neue Koordinaten $x_1 = \zeta + \varrho_1 \dot{\zeta} - \mu$, $x_2 = \zeta + \varrho_2 \dot{\zeta} + \mu$ eingeführt, so ist die Funktion

$$V = \frac{1}{2} A (x_1^2 + x_2^2) + \frac{a_1^2}{2\varrho_1} x_1^2 + \frac{2a_1 a_2}{\varrho_1 + \varrho_2} x_1 x_2 + \frac{a_2^2}{2\varrho_2} x_2^2 + |\sigma|$$

(falls $A \leq 0$, ϱ_1, ϱ_2 reell, $a_1 a_2$ bel. reell) bzw.

$$V = A x_1 x_2 + \frac{a_1^2}{2\varrho_1} x_1^2 + \frac{2a_1 a_2}{\varrho_1 + \varrho_2} x_1 x_2 + \frac{a_2^2}{2\varrho_2} x_2^2 + |\sigma|$$

(falls $A > 0$, ϱ_1, ϱ_2 konj. komplex, a_1, a_2 bel. konj. komplex) positiv. Für $\lambda n > \frac{1}{2}$ wird $\frac{dV}{dt} < 0$ und die Bewegung verläuft in diesem Falle stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Elastizität:

Fichera, C.: Sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 403—408 (1947).

Soit C un corp élastique et Σ son contour. Soient \mathcal{E} et \mathcal{T} deux vecteurs sommable, sur Σ . On associe successivement \mathcal{E} et \mathcal{T} aux vecteurs de Somigliana $s_i(M, P')$ ($i = 1, 2, 3$) avec M sur Σ et P' extérieur à C ; on interprète \mathcal{E} comme un déplacement et \mathcal{T} comme une tension, \mathcal{E} et \mathcal{T} vérifiant le théorème de réciproité de Betti. — Sous de telles hypothèses l'auteur énonce un théorème selon lequel le vecteur s , dont les trois composantes sont données par les formules de Somigliana, jouisse des propriétés suivantes: 1. Il satisfait à l'équation de l'équilibre élastique dans C ; 2. Quand P tend vers un point M de Σ (sur la normale intérieure à Σ), $s(P)$ tend vers $\mathcal{T}(M)$; 3. La tension correspondante à $s(P)$ tend vers $\mathcal{E}(M)$. — De telles propriétés montrent l'équivalence du système de l'élasticité avec un système d'équations intégrales de première espèce. L'Auteur note que le système que traduit le théorème de Betti est équivalent à un système de Fischer-Riesz, par lequel, connaissant \mathcal{E} , on peut déduire \mathcal{T} et réciproquement. — Les formules de Somigliana deviennent donc résolutives autant pour le problème dans lequel sont donnés les déplacements comme dans le cas où ce sont les tensions sur Σ qui sont données. — L'auteur montre que cette circonstance même est vérifiée dans le cas des problèmes mixtes, au moyen de la détermination préalable d'un certain vecteur \mathcal{R} . G. Grioli.

Džanelidze, G. Ju.: Übersicht über die Arbeiten zur Theorie der Verbiegung dicker und dünner Platten, die in der USSR veröffentlicht worden sind. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 109—128 (1948) [Russisch].

Übersicht über russische Arbeiten der letzten 15 Jahre über die Statik dicker und dünner Platten, während Stabilitäts- und dynamische Fragen keine Berücksichtigung finden. Einteilung dieser Arbeiten in drei Gruppen: 1. Dicke Platten konstanter oder variabler Dicke; 2. Arbeiten im Anschluß an klassische Methoden; 3. Neue Methoden zur Untersuchung dünner Platten. — Aus der ersten Gruppe seien genannt: Galerkin mit einer Lösung der dreidimensionalen Gleichung des elastischen Gleichgewichts durch biharmonische Funktionen und Anwendung dieser Methode auf die frei aufliegende rechteckige Platte; Lufe mit einer symbolischen Methode für die Lösung von r grad $\operatorname{div} q + \Delta q = 0$ und einer Erweiterung der gewöhnlichen Plattengleichung auf Platten veränderlicher Steifigkeit, was Šuležkov weiter für anisotropes Material verallgemeinerte. — Die zweite Gruppe enthält Ansätze üblicher Gestalt. Verschiedene Monographien, mit Tabellen und Diagrammen zum Gebrauch für Ingenieure. — Zur dritten Gruppe gehört eine Methode von Lufe, wo bei kreisförmiger Platte durch Übergang ins Komplexe die allgemeine Lösung als Summe aus einem Stieltjeschen Integral und einem Ausdruck mit zwei willkürlichen analytischen Funktionen erscheint, für die aus den Randbedingungen zwei Differentialgleichungen abgeleitet werden. Verallgemeinerung dieser Methode durch Lechnickij auf Platten beliebiger Gestalt mit Löchern und für anisotropes Material. Weiterhin die Methode der fiktiven Belastung von Repman, bei der für die rechteckige Platte zur tatsächlichen Belastung q noch fiktive Belastungen q^* hinzugefügt werden, die Kräften und Momenten an zwei Rändern entsprechen. Bestimmung der q^* durch Erfüllung der Randbedingungen. Verallgemeinerung der Methode durch Korenev auf Platten beliebiger Gestalt Ω_0 mit Hilfe der Greenschen Funktion in einem $\Omega \supseteq \Omega_0$. Für die fiktiven Belastungen auf Linien in $\Omega - \Omega_0$ ergeben sich zwei lineare Integralgleichungen erster Art. Lufe behandelte eingeklemmte Platten mit Rändern $y = \lambda \cdot \eta_{1,2}(x)$ durch Entwicklung von Belastung und Ausbiegung nach λ : Die biharmonische Gleichung zerfällt in ein Rekursionssystem einfacherer Differentialgleichungen. Geršgorin löste die Plattengleichung für in Kreisen symmetrisch angebrachte Belastung mit Hilfe der Greenschen Funktion. Džanelidze zeigte für polygonale Platten, daß die Scherkräfte ohne vorherige Bestimmung der Ausbiegung sich aus einer Potentialgleichung bestimmen lassen. Für rechteckige und dreieckige Platten mit Einzellast ist die Lösung geschlossen durch die θ -Funktion angebar. — Das Literaturverzeichnis enthält 69 russische Arbeiten der Jahre 1930—1947.

Hans Richter (Haltingen, Kr. Lörrach).

Gol'denweizer (Goldenweiser), A. I. und A. I. Lufe (Lourye): Über die mathematische Theorie des Gleichgewichts elastischer Schalen. (Übersicht über die in der USSR veröffentlichten Arbeiten). Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 565—592 (1947) [Russisch].

Unter Ausschluß der rein technisch orientierten Arbeiten, die auf die Gewinnung von Faustformeln hinielen, und der Untersuchungen über die Stabilität von Schalen

wird ein kritischer Überblick über 42 Arbeiten russischer Autoren (Galerkin, Novošilov, Kilčevskij, Sokolovskij, Vlassov u.a.) der letzten 15 Jahre auf dem Gebiete der „mathematischen Theorie der elastischen Schalen“ gegeben. Hierzu wird gerechnet die Aufstellung der Grundgleichungen unter Benutzung der Differentialgeometrie, die Überführung der dreidimensionalen Aufgabe in eine zweidimensionale durch spezielle Ansätze über die Art der Verformung und die Diskussion der erhaltenen Differentialgleichungen, insbesondere für bestimmte Formen der Schale. — Abschnitt 1: Lösungen durch spezielle Ansätze über die Verformung. Frage der Gültigkeit der Vernachlässigung. Abschnitt 2: Allgemeine Differentialgleichungen der Schalentheorie in Tensorschreibweise. Abschnitt 3: Asymptotische Eigenschaften (für Schalendicke $\rightarrow 0$) des allgemeinen Integrals des Systems der Differentialgleichungen. Abschnitt 4: Allgemeine Theorie im Falle des Fehlens von Momenten. Abschnitt 5: Spezialisierung auf bestimmte Formen wie Zylinder, Kugel, Konus und auf Rotationssymmetrie für Schale und Belastung derselben. *Richter*.

Kunee, I. P.: Stabilität einer zylindrischen Schale jenseits der Elastizitätsgrenze. Priklad. Mat. Mech., Moskva **11**, 561—562 (1947) [Russisch].

Ein dünnwandiger Kreiszyylinder der Dicke h und vom mittleren Radius R wird in Achsenrichtung ($=x$ -Richtung) mit dem Drucke σ_s (= einachsige Elastizitätsgrenze) zusammengepreßt. Im elastischen Bereich gelte das Hookesche Gesetz, im plastischen die Misessche Bedingung. Die radiale Ausbiegung $w(x)$ der Mittelfläche habe die Gestalt: $w(x) = w_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$. Hierbei sei w_0 klein gegen h , so daß die Kirchhoffschen Hypothesen für kleine Verbiegungen angewendet werden können. Einsetzen der angegebenen Lösungsform in die Differentialgleichung der Gleichgewichtslage zeigt, daß für $S = \frac{3 R \sigma_s}{h E} > 4$ zwei, für $1,81 < S < 4$ eine und für $S < 1,81$ keine reelle Lösung für l existiert. Die Stabilitätsbedingung lautet daher: $h/R > 1,66 \sigma_s/E$. Die analoge Rechnung für Beanspruchung durch hydrostatischen Druck liefert: $h/R > 3,46 \sigma_s/E$. — Ist dagegen die Axialspannung das Doppelte der Tangentialspannung, so wird l unabhängig von h , so daß bei Fehlen einer Verfestigung stets Instabilität herrscht. *Hans Richter* (Haltingen).

Volterra, E.: Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 42—47 (1947).

Auf Grund von Erfahrungen des Verf. nimmt die Beziehung zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε in gewissen Materialien die Form

$$\sigma = E \varepsilon + \int_0^t \Phi(\tau) \frac{d\varepsilon(t-\tau)}{d\tau} d\tau$$

an, wo E der Elastizitätsmodul, t die Zeit (gerechnet vom Beginn der Deformation an), τ ein allgemeiner Zeitpunkt im Intervall $(0, t)$ und $\Phi(\tau)$ eine als bekannt anzusehende Funktion von τ ist. Auf Grund dieser Annahme genügt die Verschiebung $u(x, t)$ eines allgemeinen Punktes eines Balkens der Integro-Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a^2 \left[\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{E} \int_0^t \Phi(t-\tau) \frac{\partial^5 u(x, \tau)}{\partial x^4 \partial \tau} d\tau \right] = f(x, t),$$

wo $a^2 = EI/m$ (I das Trägheitsmoment des Balkens, m die Masse pro Längeneinheit) und $f(x, t)$ die äußere Kraft pro Längeneinheit dividiert durch die Masse ist. Unter der Annahme, daß der Balken einfach unterstützt und die Nachwirkung vom ersten Grade [$\Phi(\tau)$ eine Exponentialfunktion] ist, löst Verf. die Gleichung (1) sowohl im Falle $f(x, t) = 0$ (freie Schwingungen) als auch im Falle einer sinusartigen Belastungsfunktion der Koordinaten und der Zeit (erzwungene Schwingungen). *Graffi*.

Volterra, E.: Problemi dinamici della trave in regime ereditario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 178—180 (1947).

In Fortsetzung der Untersuchungen der vorstehend besprochenen Note bestimmt Verf. die Deformation eines Balkens bei Nachwirkung, gegeben durch eine konzentrierte, feste oder pulsierende Belastung, die auf dem Balken selbst mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet.

Graffi (Bologna).

Volterra, E.: Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 307—311 (1947).

Verf. betrachtet einen Balken unendlicher Länge, der auf elastischem Boden aufliegt, und nimmt an, daß zwischen der Reaktion $\pi(x)$ und dem Biegungs Pfeil $y(x)$ des Balkens die Relation

$$(1) \quad y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi) k(x-\xi) d\xi$$

besteht, wo $k(x-\xi)$ die sogenannte Einflußfunktion ist. Er fügt zu (1) die Gleichung $E I \frac{d^4 y}{dx^4} = p(x) - \pi(x)$ hinzu, wo $p(x)$ die auf den Balken wirkende äußere Belastung, I sein Trägheitsmoment und E der Elastizitätsmodul ist, und löst das so erhaltene System durch die Fouriersche Transformation. So erhält er eine Formel, die bei bekannter Belastung $p(x)$ die Bestimmung von $y(x)$ gestattet, gültig bei beliebiger Einflußfunktion $k(x-\xi)$.

Graffi (Bologna).

Volterra, E.: Sul problema generale della trave poggiata su suolo elastico. II. Applicazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 418—421 (1947).

Verf. wendet die Formeln der vorstehend besprochenen Note zur expliziten Bestimmung des Biegungs Pfeils eines Balkens unendlicher Länge an, der auf elastischem Boden aufliegt und auf einem Stück der Länge l gleichförmig belastet ist. Die Durchführung der Berechnung erfolgt einerseits mit der von Winkler vorgeschlagenen Einflußfunktion $k(x) = \delta(x)/\lambda$ (wo λ konstant, $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$, $\delta(0) = \infty$,

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$), andererseits mit der von Jodi vorgeschlagenen $k(x) = A \exp(-Bx)$ (wo A, B positive Konstanten).

Graffi (Bologna).

Volterra, E.: Sul problema generale della piastra poggiata su suolo elastico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 595—598 (1947).

Verf. dehnt die Ergebnisse der vorstehend besprochenen Noten auf den Fall einer unendlichen Platte aus, die auf elastischem Boden aufliegt. Sei $w(x, y)$ der Biegungs Pfeil der Platte, $p(x, y)$ die auf sie wirkende Belastung, $\pi(x, y)$ die Reaktion des Bodens, $k(x-\xi, y-\eta)$ die Einflußfunktion, D die Torsionsfestigkeit der Platte. Dann ist folgendes System zu lösen:

$$(1) \quad D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y) - \pi(x, y)$$

$$(2) \quad w(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta.$$

Auch in diesem Falle erhält man durch die Fouriersche Transformation eine Formel, die bei bekannter Belastung $p(x, y)$ die Bestimmung von $w(x, y)$ gestattet, gültig bei beliebiger Einflußfunktion. Diese Ergebnisse werden sodann auf eine Platte mit einer gleichförmig über ein Rechteck verteilten Gesamtbelastung angewandt, einmal mit der Einflußfunktion $k(x, y) = \delta(x, y)/\lambda$ (wo λ konstant, $\delta(0,0) = \infty$, $\delta(x, y) = 0$ für x oder $y \neq 0$,

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1$) oder $k(x, y) = A \exp \left[-B \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right]$

(wo A, B positive Konstanten).

Graffi (Bologna).

Synge, J. L.: The method of the hypocircle in elasticity when body forces are present. Quart. appl. Math. 6, 15—19 (1948).

In engem Anschluß an die ausführliche Darstellung der Prager-Syngeschen Methode [Quart. appl. Math. 5, 241—269 (1947) und J. L. Synge, Proc. R. Soc. London (A) 191, 447—467 (1947); dies. Zbl. 29, 55, 235] gibt Verf. eine neue vollständige Darstellung der Methode des Hyperkreises im Funktionenraum zur Lösung von Randwertproblemen der Elastizitätstheorie für den ebenda noch ausgeschlossenen Fall, daß zusätzlich Massenkkräfte auftreten. V. Garten (Tübingen).

Greenberg, H. J. and Rohn Truell: On a problem in plane strain. Quart. appl. Math. 6, 53—62 (1948).

Die neuerdings von W. Prager und J. L. Synge [Quart. appl. Math. 5, 241 bis 269 (1947); dies. Zbl. 29, 235] entwickelte Methode zur Gewinnung von Näherungslösungen für Randwertprobleme der Elastizitätstheorie wird auf das folgende spezielle Problem angewandt: ein unendlicher Balken von rechteckigem Querschnitt befinde sich unter dem Einfluß einer Druckkraft im ebenen Spannungszustand. Aus der Zusammendrückung $2a$ und der Druckkraft F soll der E -modul ermittelt werden. Die Prager-Syngesche Methode liefert für den Quotienten Ea/F nach 4 Iterationen bereits Abschätzungen, die sich nur um 2% unterscheiden. V. Garten (Tübingen).

Kufarev, P. P.: Über einen speziellen Fall der Schwingung einer Schraubenfeder mit Zusammenstoßen der Windungen. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 209—210 (1948) [Russisch].

Bijlaard, P. P.: On the torsional and flexural stability of thin walled open sections. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 314—321 (1948).

Fejnberg, S. M.: Prinzip der Grenzspannung. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 63—68 (1948) [Russisch].

Auf einen Körper mögen äußere Volumkräfte und Oberflächenkräfte wirken. Im Inneren herrsche ein Spannungszustand L , der in jedem Punkte durch den Spannungstensor T und seinen Deviator T' charakterisiert wird. L heißt möglich, wenn T stetig differenzierbar von den Ortskoordinaten abhängt und in jedem Punkte im Innern und auf dem Rande Kräftegleichgewicht herrscht. Ein mögliches L heißt zugelassen, wenn unter Voraussetzung der Misesschen Fließbedingung für die Intensität $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \text{Spur}(T'^2)}$ gilt: $\sigma \leq k$. Es wird das folgende Prinzip der Grenzspannung vorgeschlagen: Gibt es bei vorgegebenen äußeren Kräften zugelassene L , so wird eines davon realisiert. Ist L zugelassen, so heißt $\lambda = \min(k/\sigma)$ der Belastungskoeffizient von L . Die obere Grenze λ_0 aller λ für die Gesamtheit aller zugelassenen L heißt Festigkeitskoeffizient des Körpers bei Anwendung der vorgegebenen äußeren Kräfte. Ein zu λ_0 gehöriges L heißt Grenzspannung. Werden die äußeren Kräfte mit λ_0 multipliziert, so stellt sich nach dem Pr. d. Gr. ein $\lambda_0 L_0$ ein; bei Multiplikation mit einem Faktor $> \lambda_0$ tritt Fließen ein. — Bei L_0 bilden alle Punkte mit $\sigma = k$ (plastischer Bereich) dreidimensionale Gebiete. — Werden in dem Körper Verbindungen gelöst, so kann λ_0 nicht steigen. — Im plastischen Bereich kann L_0 durch Lösung eines Variationsproblems gefunden werden, dessen Eulersche Gleichungen nicht-linear sind. Linearität kann durch Änderung der Fließbedingung erreicht werden. — Die Betrachtungen lassen sich auf den Fall eines ortsabhängigen k übertragen. Hans Richter (Haltigen, Kr. Lörrach).

Bachšijan, F. A.: Zum zäh-plastischen Fließen beim Stoß eines Zylinders auf eine Platte. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 47—52 (1948) [Russisch].

Ein undeformierbarer Kreiszyylinder fällt auf eine unendlich ausgedehnte Platte endlicher Dicke aus zäh-plastischem Material. Es wird angenommen, daß das Material nur in Fallrichtung ausweicht, was praktisch bei großer Masse oder Anfangsgeschwindigkeit des Zylinders der Fall ist. Für das Material der Platte wird die Gültigkeit der Theorie von A. A. Iljušin (Zur Frage des zäh-plastischen Fließens von Materialien. Arbeiten der Konferenz über plastische Deformationen. 1938)

vorausgesetzt, wonach für den Fließgeschwindigkeitstensor F und den Tensor P' der Überspannungen (= Spannungsdeviator) bei der mittleren Fließgeschwindigkeit $q = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \text{Spur}(F^2)}$ gilt: $P' = \sigma(q) \cdot F/q$ mit $\sigma(q) = k + 2\mu \cdot q$. — Die sich ergebende Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Plattenmaterials hängt bei Einführung dimensionsloser Variabler nur von der St. Venantschen und der Reynoldsschen Zahl ab. — Die Lösung wird in Zylinderkoordinaten als Summe einer nur von r abhängigen Funktion und einer unendlichen Reihe aus Produkten von Bessel-Funktionen von r mit von der Zeit abhängigen Exponentialfunktionen angesetzt. — Bei großer Zylindermasse ist die Geschwindigkeit des Zylinders praktisch konstant. Die Entwicklungskoeffizienten der obigen Reihe werden dann explizit als Integrale über Bessel-Funktionen angegeben. Bei variabler Geschwindigkeit des Zylinders erhält man dagegen ein unendliches Gleichungssystem, dessen Auflösung nicht diskutiert wird. — Statt dessen wird dieser Fall so behandelt, daß schrittweise die Zylindergeschwindigkeit als konstant angesehen, die für diesen Fall berechenbare Kraft auf den Zylinder ermittelt und aus der Bewegungsgleichung die Zylindergeschwindigkeit für den nächsten Schritt gefunden wird. *Richter.*

Polya, G.: Sur la fréquence fondamentale des membranes vibrantes et la résistance élastique des tiges à la torsion. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 346—348 (1947).

Ein von einer Kurve C begrenzter ebener Bereich D wird einerseits als Gleichgewichtslage einer längs C gleichmäßig eingespannten Membran, andererseits als senkrechter Querschnitt eines elastischen homogenen und isotropen Zylinders aufgefaßt. Sei A der Flächeninhalt von D , I sein polares Flächenträgheitsmoment, λ die Grundfrequenz der Membran, M der elastische Torsionswiderstand des Zylinders. Die zwischen λ^2 und M^{-1} bestehende Analogie wird näher verfolgt und u. a. bemerkt, daß die Steinersche Symmetrisierung bez. irgendeiner Geraden A nicht verändert, I und λ vermindert und M vergrößert. Es werden interessante Folgerungen, insbesondere für konvexe Bereiche, daraus gezogen. *V. Garten.*

Rachmatulin, Ch. A.: Über die Ausbreitung zylindrischer Wellen bei plastischen Deformationen (Torsionsstoß). Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 39—46 (1948) [Russisch].

Untersucht wird die Ausbreitung der Deformation in einem elastoplastischen Medium, wenn auf einen in das Medium eingelagerten unendlich dünnen und vollkommen starren Zylinder vom Radius r_0 plötzlich ein Drehmoment $f(t)$ ausgeübt wird, das Spannungen oberhalb der Elastizitätsgrenze erzeugt. Für den Fall, daß $f'(t) > 0$ so groß ist, daß Entlastungswellen nicht auftreten, wird die Ausbreitung der elastischen Deformation mit Hilfe der Charakteristikenmethode und die Deformation an der Grenze $r = r_0 + a_1 t$ ($a_1^2 = \text{Verfestigungsmodul Dichte}$) zwischen elastischem und plastischem Bereich untersucht. Der Radius der Ausbreitung der Stoßwelle hängt nicht von dem Verlauf von f , sondern nur von $f(0)$ ab. — Für den Fall, daß $f(t)$ zur Zeit $t = 0$ vom Werte Null auf einen konstanten Wert springt, wird die plastische Deformation unter der Voraussetzung diskutiert, daß $r_0 + a_1 t$ die Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich darstellt, was wegen der auftretenden Entlastungswellen nach einiger Zeit nicht mehr zu sein braucht.

Hans Richter (Haltingen, Kr. Lörrach).

Hydrodynamik:

• **Tables of supersonic flow around yawing cones.** By the staff of the Computing Section, Center of Analysis. Massachusetts Institute of Technology. Under the direction of Zdenek Kopal. Cambridge, Massachusetts, 1947. XVIII, 321 p. \$ 5.00.

• **Milne-Thomson, L. M.:** Theoretical aerodynamics. London: Macmillan and Co., Ltd. 1948. XIX, 363 p. 40 s. net.

Schiffman, Max and D. C. Spence: The flow of an ideal incompressible fluid about a lens. *Quart. appl. Math.* 5, 270—288 (1947).

Diese Arbeit fügt zu den wenigen Körpern, für welche bisher das Geschwindigkeitspotential der wirbelfreien Strömung explizit berechnet ist, die Linsen, das sind die von zwei Kugelflächen begrenzten Drehkörper, deren Achse in der Strömungsrichtung liegen soll. Als uneigentlicher Fall gehören hierzu zwei völlig getrennte Kugeln. Für eine Kugel wird das Strömungsbild bekanntlich durch einen Dipol geliefert, für zwei getrennte Kugeln nimmt man einen in jeder der Kugeln an und bessert den Schaden, den der andere Dipol dabei an den Randwerten anrichtet, dadurch aus, daß man in seinem Spiegelbild einen weiteren Dipol hinzufügt usf. Die Reihe der Felder dieser beiden Dipolfolgen konvergiert und liefert das gesuchte Geschwindigkeitspotential. Bei der Übertragung dieses Verfahrens auf Linsen wird nun die Gefahr, daß die gespiegelten Dipole in die strömende Flüssigkeit zu liegen kommen, unter Benutzung von Ringkoordinaten ψ , σ :

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r + iz = ia \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\psi + i \sigma)$$

in einem unendlich-vielblättrigen Riemannschen Raume umgangen, der seine Verzweigungslinie in der Linsenkannte hat. Da sich die auftretenden Reihen als die Partialbruchreihen trigonometrischer Funktionen herausstellen, findet man geschlossene Ausdrücke für das Geschwindigkeitspotential. Ein Integral gibt dann die „scheinbare Masse“ der Linse, durch welche die Energie der Strömung darzustellen ist. Dieses Integral wird für symmetrische Linsen zahlenmäßig ausgewertet, wobei sich geschlossene Formeln angeben lassen, wenn der Kantenwinkel der Linse ein rationales Verhältnis zum Vollwinkel hat; in diesem Falle genügt übrigens ein endlich-vielblättriger Riemannscher Raum, da dann die Folge der Dipole von selber abbricht. *Bödewadt (Göttingen).*

Nebbin, C.: Ulteriori precisazioni sull'uso dei coefficienti di Coriolis nelle equazioni del moto di corrente.. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 2, 422—430 (1947).

Auseinandersetzung über die Unstimmigkeiten, die sich bei der Summation der Bernoullischen Gleichung über ein endliches Bündel von Stromfäden infolge ungenauer Voraussetzungen und ungenauer Mittelbildungen ergeben haben.

Hamel (Berlin).

Ferrari, C.: Sulla teoria delle schiere di profili alari. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 2, 289—299 (1947).

Eine Reihe von unendlich vielen Profilen, die parallel mit stets gleichem Abstand und im übrigen kongruent sind, wird durch eine geeignete mehrdeutige Funktion konform auf einen Kreis abgebildet, und dann nach dem Vorgang von Glauert die Strömung mit Hilfe einer längs der Profilschne angesetzten Wirbelreihe auf Grund der gegebenen Profilform (Annahme sehr dünnes und wenig gekrümmtes Profil!) berechnet. Auf Grund der Kutta-Joukowskischen Abflußbedingung ergibt sich die Zirkulation bei verschwindendem und bei von Null verschiedenem Anstellwinkel, wodurch der Vergleich mit einem „äquivalenten“ einzelnen Profil möglich wird. Es läßt sich ferner ein optimaler Anstellwinkel aus der Bedingung finden, daß auch an der Vorderkante eine endliche, keine unendliche Geschwindigkeit auftritt. Mehrere numerisch durchgeführte Beispiele werden zur Erläuterung beigelegt. *Schmeidler.*

Ferrari, C.: Sulla determinazione del profilo „ottimo“ per le pale dei compressori assiali. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 2, 576—586 (1947).

Wie im vorst. Referat handelt es sich um eine unendliche Reihe von Flügelprofilen, deren Strömung durch konforme Abbildung auf einen Kreis bestimmt wird. Hier wird der besondere Fall eines „optimalen“ Profils weiter verfolgt, bei dem eine möglichst gleichförmige Druckverteilung, nämlich auf der Oberseite kon-

stanter Unterdruck, auf der Unterseite konstanter Überdruck, vorliegt. Dies liefert bestimmte Profilformen, die auch numerisch an Beispielen ausgerechnet und gezeichnet werden.

W. Schmeidler (Berlin).

Carafoli, Elie et Nicolas Tipei: Sur le calcul des ailes rectangulaires en flèche. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 1273—1275 (1947).

Für den Flügel konstanter Tiefe werden die Fourierkoeffizienten der durch Pfeilung hervorgerufenen Auftriebsverteilung berechnet nach einem Verfahren, das in einer früheren Arbeit der Verff. (dies. Zbl. 29, 175) angegeben wurde.

Weissinger (Hamburg).

● Pulliam, Francis McConnell: Existence of a two dimensional potential flow with wake past a symmetric convex profile. Abstract of a Thesis, Urbana, Illinois 2 S. (1947).

Kalinin, N. K.: Über instationäre Filtration im Falle einer Sickerdohle in einer wasserdurchlässigen Schicht endlicher Tiefe. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 199—206 (1948) [Russisch].

Lukomekaja, M. A.: Über die Strömung einer Flüssigkeit zu einem Loch in einer inhomogenen Schicht. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 207—208 (1948) [Russisch].

Batchelor, G. K.: Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence. Proc. Cambridge philos. Soc. 43, 533—559 (1947).

Bericht über zwei Arbeiten von A. N. Kolmogoroff, C. r. Acad. Sci. URSS 30, 301—305 (1941) und 32, 16—18 (1941).

Lokale isotrope Turbulenz existiert höchstwahrscheinlich auch in solchen turbulenten Strömungen, deren größte Turbulenzelemente nicht isotrop verteilt sind, sofern man zu hinreichend kleinen Turbulenzelementen übergeht. Kolmogoroff stellt zwei Ähnlichkeitshypothesen auf. ϵ sei die pro Zeit- und Volumeneinheit in der Strömung dissipierte Energie, ν sei die molekulare Zähigkeit. Die erste Ähnlichkeitshypothese besagt, die Turbulenz hänge in einem Gebiet, in dem sie lokal isotrop ist, nur von ϵ und ν ab. Die zweite besagt, daß die Korrelationsfunktionen, welche das Verhalten der Turbulenz für Abstände beschreiben, für die die Reynoldssche Zahl groß gegenüber der kritischen ist, durch ϵ allein bestimmt sind. Dies wird an Experimenten von Dryden, die allerdings nicht zu hinreichend hohen Reynoldsschen Zahlen reichen, empirisch wahrscheinlich gemacht. Die Theorie ergibt dann die mathematische Form der Korrelationsfunktionen. Es sei z. B. definiert

$$B_{dd}(r) = (\overline{u'_d - u_d})^2 = 2u'^2 [1 - f(r)],$$

wobei der Index d die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Verbindungslinie der beiden Punkte P und P' bedeutet, an denen die Geschwindigkeit die respektiven Werte u und u' hat, wobei ferner u'^2 das mittlere Schwankungsquadrat der Geschwindigkeit in beliebiger Richtung ist und f die in der Theorie der isotropen Turbulenz bekannte Korrelationsfunktion darstellt. Aus der zweiten Ähnlichkeitshypothese folgt dann die Gleichung: $B_{dd}(r) = \text{const } (r\nu)^{2/3}$. C. F. v. Weizsäcker.

Hicks, Bruce L.: On explicit solutions of the equations for steady compressible flow. Physic. Rev., Minneapolis, II. s. 72, 433 (1947).

Fußend auf einer Arbeit von Münck [Physic. Rev., Minneapolis, II. s. 72, 176 (1947)], bringt Verf. die kompressiblen, adiabatischen, ebenen Gasströmungen in Zusammenhang mit einer Funktionalgleichung für zwei Funktionen, die vom Potential bzw. der Stromfunktion abhängen. Bisher sind Lösungen dieser Funktionalgleichung nur für triviale Strömungen bekannt. Der Verfasser hofft, daß man exakte oder angenäherte Lösungen der Gleichungen finden kann, die u. U. Strömungen im transsonischen Gebiet liefern.

Wendt (Dresden).

Villey, J.: Sur la position de la section sonique dans la tuyère de Laval. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 27—29 (1947).

Verf. hat in früheren Arbeiten Gleichungen für die linearisierte Gasströmung unter Berücksichtigung von Wärmezufuhr und Reibung abgeleitet. Die vorliegende Veröffentlichung bringt einfache Folgerungen seiner Theorie in bezug auf die Lage des Schallquerschnitts in Lavaldüsen.

Wendt (Dresden).

Villey, J.: Les écoulements subsoniques dans une tuyère de Laval. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 329—330 (1947).

Verf. schließt an eine frühere Veröffentlichung (s. vorsteh. Referat) an und behandelt insbesondere die sich für reine Unterschallströmungen aus den dort abgeleiteten Gleichungen ergebenden Folgerungen.

Wendt (Dresden).

Gunn, C. G.: Linearized supersonic aerofoil theory. I, II. Philos. Trans. R. Soc. London, A **240**, 327—373 (1947).

Zur Berechnung linearisierter Überschallströmungen um Tragflügel entwickelt Verf. eine allgemeine Technik, deren Grundlage die Laplace-Transformation bildet. Der Tragflügel liege in der x, z -Ebene, z -Achse in Richtung der Grundströmung, der Ursprung des Koordinatensystems auf einem Punkt der Vorderkante derart, daß im ganzen Halbraum $z < 0$ die Strömung ungestört ist. Dann genügt das Strömungspotential Φ der Wellengleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$, $\alpha = \sqrt{M^2 - 1}$, M = Mach-Zahl der Grundströmung, mit den Randbedingungen

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=+0} = f(x, z), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=-0} = g(x, z)$$

auf der Tragfläche und $\Phi|_{z=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{z=0} = 0$, $\Phi(\infty) = 0$, wo $f(x, z)$, $g(x, z)$ gegebene Funktionen sind. Man kann sich auf den symmetrischen Fall $f(x, z) = -g(x, z)$ (symmetrisches Profil bei Anstellwinkel 0) und den antisymmetrischen Fall $f(x, z) = g(x, z)$ (z. B. angestellte Platte) beschränken. Durch Anwendung der Laplace-Transformation

$$\bar{\Phi}(x, y) = \int_0^\infty e^{-p z} \Phi(x, y, z) dz$$

entsteht daraus $\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} = \alpha^2 p^2 \bar{\Phi}$ mit vorgeschriebenen Werten für $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}$ auf dem Flügel. Für den rechteckigen, nichtangestellten Flügel mit symmetrischem, von x unabhängigem Profil $y = \pm \eta(z)$ läßt sich der Ansatz explizit durchrechnen mit dem Ergebnis

$$\Phi(x, y, z) = \mp \frac{\alpha}{\pi} \iint \frac{\eta'(\xi) d\xi d\zeta}{\sqrt{(z - \zeta)^2 - \alpha^2 [y^2 + (x - \xi)^2]}},$$

wobei das Integral über den Teil des Flügelgrundrisses zu erstrecken ist, der innerhalb des stromaufwärts gerichteten, von x, y, z ausgehenden Machschen Kegels liegt. Ebenso läßt sich die Lösung für die halb-unendlich breite, angestellte Platte explizit angeben; durch Überlagerung zweier solcher Lösungen findet man die Lösung für die angestellte rechteckige Platte endlicher Spannweite, vorausgesetzt, daß die Tiefe kleiner als die α -fache Spannweite ist. Die Lösung setzt sich additiv zusammen aus einer „ebenen Welle“ (Lösung des ebenen Problems) und zwei Wellen, die nur im Bereich der von den vorderen Ecken ausgehenden Machschen Kegel wirksam sind. Ist die Tiefe größer als die α -fache Spannweite, so schneiden die Mäntel dieser Kegel die gegenüberliegenden Seitenkanten des Flügels, und man erhielte stromabwärts dieser Schnittpunkte unzulässige Unstetigkeiten. Diese werden beseitigt durch Überlagerung von Wellen, die von diesen Schnittpunkten ausgehen. So fortfahrend, kann man die Druckverteilung der angestellten rechteckigen Platte beliebiger Streckung berechnen. Zahlenergebnisse für Flügel bis hinunter zur Streckung $\frac{1}{2\alpha}$ werden angegeben. — Das letzte Überlagerungsproblem führt für die Laplacetransformierte $\bar{\Phi}$ auf die Lösung der Wellengleichung:

unter den Randbedingungen: 1. $\bar{\Phi}$ nebst ersten Ableitungen überall stetig außer auf der positiven x -Achse, wo 2. $\bar{\Phi}$ bei Annäherung von oben und unten vorgegebene Werte annimmt, 3. $\bar{\Phi} = 0$ für $y = \pm \infty$. Diese Aufgabe, sowie die entsprechende für vorgeschriebene Randwerte von $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}$ läßt sich mit Hilfe explizit ausgerechneter Greenscher Funktionen lösen. Diese Greenschen Funktionen lassen sich auch für andere Umströmungsprobleme verwenden. Behandelt werden damit: 1. nochmals der Rechteckflügel mit symmetrischem, x -unabhängigem Profil, 2. dasselbe mit x -abhängiger Profildicke, 3. die angestellte Platte mit gekrümmter Vorderkante. — In Teil II werden mittels der in Teil I entwickelten Methoden Flügel behandelt, bei denen die Seitenkanten nicht mehr parallel, bzw. die Vorderkante und Hinterkante nicht mehr senkrecht zur Grundströmung sind, insbesondere also Pfeilflügel. Für den Fall der dreieckigen, über den Mach-Winkel hinaus zurückgefeilten Platte wird ein Iterationsverfahren angegeben, das gut zu konvergieren scheint, außer, wenn der Winkel an der Spitze ein sehr kleiner Bruchteil des Machschen Winkels ist. Zahlenbeispiel.

Weissing (Hamburg).

Snow, Robert M.: Aerodynamics of thin quadrilateral wings at supersonic speeds. Quart. appl. Math. 5, 417—428 (1948).

Nach A. Busemanns Methode der Kegelfelder behandelt Verf. praktisch wichtige Fälle linearisierter Überschallströmungen um viereckige Flügel. Diese Kegelfelder lassen sich nach einer Transformation als Lösungen der Laplaceschen Gleichung in zwei Variablen erhalten. Aus der Geschwindigkeitskomponente der Strömung in Richtung des Hauptstromes folgt dann mit Hilfe der linearisierten Bernoullischen Gleichung der Druck. Eine besondere Betrachtung erfordern die Randbedingungen an den charakteristischen Kegeln, bzw. am Tragflügel. Auf diese Weise wird z. B. der Auftriebsbeiwert und der Druckpunkt eines symmetrischen Trapezflügels berechnet, desgl. von Pfeilflügeln sowie Flügeln mit einem Knick.

E. Hölder (Leipzig).

Davidson, P. M.: The establishment of the dilatation effect in a field of sound waves. Proc. R. Soc. London A 190, 418—422 (1947).

Verf. bemerkt, daß man gegen eine Arbeit von G. Richter über den Schallstrahlungsdruck [Z. Physik 115, 97 (1940)], welche sich auf ein Medium ohne Viskosität bezieht, den Einwand machen kann, daß in einem solchen Medium Wellen endlicher Amplitude unstetig werden können (Verdichtungsstoß!). Er wiederholt daher die Überlegungen unter Zugrundelegung der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen für ein Medium mit Zähigkeit und zeigt, daß man im Grenzfall verschwindender Zähigkeit im allgemeinen die Ergebnisse Richters wieder erhält, mit Ausnahme gewisser spezieller Fälle (z. B. des Falles eindimensionaler fortschreitender Wellen). — Weiter untersucht Verf. am Beispiel der Schallwelle, die durch eine Kugel erzeugt wird, welche bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist und von $t = 0$ an radial zu pulsieren beginnt, wie sich das Schallfeld allmählich aufbaut und wie sich die Schallstrahlungsdilatation (bzw. der Schallstrahlungsdruck) des Mediums asymptotisch den Werten nähern, die sie im stationären Zustand haben.

A. Schoch (Göttingen).

Krasilščikova, E. A.: Die bei Vibrationen eines Flügels, der sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt, erregte Luftbewegung. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 56, 571—574 (1947) [Russisch].

Es wird die reibungslose Strömung um einen Tragflügel endlicher Spannweite berechnet, der sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt und dabei gleichzeitig harmonische Schwingungen senkrecht zur Flügelebene ausführt. Das Geschwindigkeitspotential wird aus der Wellengleichung ermittelt. In ähnlicher Weise wie bei dem früher von L. Prandtl und H. Schlichting behandelten stationären Problem [Luftfahrtforschung 13, 313—319, 320—335 (1936); spielt sich die

Strömung zur Hauptsache in den beiden Machschen Kegeln ab, die von den Flügelenden abgehen und deren Achsen parallel zur Hauptströmungsrichtung sind. Im einzelnen werden die beiden folgenden Grundaufgaben gelöst, die beide auf Integralgleichungen führen: I. Berechnung des Geschwindigkeitspotentials aus den auf dem Flügel vorgegebenen Normalkomponenten der Geschwindigkeit. II. Berechnung der Normalgeschwindigkeit auf dem Flügel aus der vorgegebenen Druckverteilung. (Umkehrung der I. Aufgabe.) *H. Schlichting* (Braunschweig).

Relativitätstheorie:

Giao, A.: Sur la propagation de la lumière dans un champ électrostatique. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1212—1214 (1947).

Auf Grund einer früher gegebenen Theorie über die Synthese von allgemeiner Relativitätstheorie und Wellenmechanik zeigt Verf., daß ein Lichtstrahl in einem elektrostatischen Feld eine Ablenkung erfahren soll, für welche eine Formel hergeleitet wird. *Glaser* (Wien).

Costa de Beauregard, O.: Sur la dynamique des systèmes de points. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 333—334 (1947).

Relativistische Verallgemeinerungen des Impuls- und Drehimpulssatzes eines Systems materieller Punkte werden angegeben. *Glaser* (Wien).

Dive, P.: Relations entre les potentiels de gravitation dans la matière en mouvement. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 262—263 (1947).

Unter der Voraussetzung, daß die materielle Dichte und die Partialdrucke einer Energieverteilung nur vom Radiusvektor r vom Symmetriezentrum abhängen, wird die Beziehung dieser Größen zu den Gravitationspotentialen g_{ik} aufgestellt.

Glaser (Wien).

Gregory, Christopher: Non-linear invariants and the problem of motion. Physic. Rev., Minneapolis, II. s. **72**, 72—75 (1947).

Eine von Einstein, Infeld und Hoffmann [Ann. Math., Princeton, II. s. **39**, 65—100 (1938); dies. Zbl. **18**, 281] angegebene Näherungsmethode hat gezeigt, daß die Bewegung von Materie mit der Erfahrung übereinstimmend beschrieben werden kann durch die Punkt singularitäten des durch das Verschwinden des verjüngten Riemannstensors charakterisierten Feldes. Diese Methode wird vom Verf. angewandt auf Feldgleichungen, die aus einem um quadratische Terme erweiterten Variationsprinzip gewonnen werden. Diese Feldgleichungen werden bekanntlich von der 4. Ordnung, enthalten aber Terme, die man als elektromagnetischen Spannungstensor deuten kann. Die nach der E. I. H.-Methode gewonnenen Bewegungsgleichungen scheinen dann Terme zu enthalten, die als Lorentzkraft gedeutet werden können. — Die Bewegungsgleichungen werden bis zur Newtonschen Näherung gewonnen. Die Forderung, daß die „Kräftefunktion“ überall endlich sei, legt der Anzahl von Partikeln (= Singularitäten) starke Beschränkungen auf, die schwächer werden, wenn man statt dessen fordert, daß die Kräftefunktion endlich bleibt, falls alle Partikeln zusammenfallen.

Heckmann (Hamburg-Bergedorf).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Neumann, J. von: Les fondements mathématiques de la mécanique quantique. Paris, Felix Alcan 1947. 336 p. 400 francs.

Broglie, Louis de: Die Trägheit der Energie. Euclides, Madrid **8**, 1—4 (1948) [Spanisch].

● Broglie, L. de: Physique et microphysique. Paris: Albin Michel 1947. 370 p., 8 pl. Collection „Sciences d'aujourd'hui“. 270 fcs.

Rosen, Nathan: Statistical geometry and fundamental particles. *Physic. Rev., Minneapolis*, II. s. 72, 298—303 (1947).

Verf. unterscheidet einen „abstrakten“ Raum, der die mengentheoretische Struktur des Raumes der bisherigen Geometrie hat, und einen „observablen“ Raum, in dem nur endliche Volumina definiert werden können und in dem sich die physikalischen Messungen abspielen. Die Überlegung knüpft an an A. March [Naturwiss., 26, 649—656 (1938); dies. Zbl. 19, 427]. Die Lorentzinvarianz gilt nur für den abstrakten Raum. Gewisse Singularitäten lassen sich vermeiden, jedoch nicht die Divergenz der quantenmechanischen Störungsrechnung. C. F. v. Weizsäcker.

Castoldi, L.: Causalità e indeterminazione nei fondamenti della meccanica quantica. *Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s., 2, 610—616 (1947).

Ein bestimmter quantenmechanischer Operator G , der im allgemeinen zeitabhängig sein kann, möge in einem bestimmten Zeitpunkt eine bestimmte Reihe von Eigenwerten liefern. Es wird nun derjenige Operator G^* konstruiert, der in bezug auf dieselben Eigenfunktionen eben diese Eigenwerte ständig beibehält. Dieser Operator kann von dem ursprünglichen verschieden sein. Die Bedingung, daß die anfängliche Übereinstimmung erhalten bleibt, ist die, daß G und H vertauschbar sind und nicht explizit von der Zeit abhängen. Dann stellt G ein erstes

Integral des Problems dar. Beispiele: der Operator $\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\bar{p}_x}{m} dt$ liefert für jeden Zeitpunkt t das System der Eigenwerte der Koordinate x zur Zeit t_0 ; der Operator $\bar{p}(t) = F_x(t - t_0)$ liefert das System der Eigenwerte von p zur Zeit t_0 , wenn F_x eine konstante Kraft in der x -Richtung bedeutet. Die Ergebnisse werden auf ihre Bedeutung für die Meßbarkeit physikalischer Größen und ihren kausalen Zusammenhang hin im Sinne Diracs diskutiert. Volz (Erlangen).

Petiau, Gérard: Sur le rayon de l'électron. *Rev. sci.*, Paris 85, 916 (1947).

Ebenso wie man aus der elektrostatischen oder magnetischen Feldenergie eines geladenen Teilchens durch Gleichsetzen mit $m_0 c^2$ einen Teilchenradius r_0 gewinnen kann, so kann man dies für Teilchen mit magnetischem Moment auch aus der Energie des magnetischen Dipolfeldes. Für ein Teilchen mit einem Moment von s Bohrschen Magnetonen wird $R_0 = r_0 (137 \cdot s/3)^{2/3}$, im Fall des Elektrons $R_0 \approx 12 r_0$, im Fall des Protons $R_P \approx 24 r_P$, des Neutrons $R_N \approx 19 r_N$, also für Proton und Neutron die gleiche Größenordnung. Volz (Erlangen).

McMillan, W. G. and E. Teller: On the production of mesotrons by nuclear bombardment. *Physic. Rev., Minneapolis*, II. s. 72, 1—6 (1947).

Die Mesonenerzeugung durch Beschuß von Atomkernen mit schnellen, schweren Teilchen wird theoretisch untersucht. Unter Berücksichtigung der Nullpunktsenergie der Kernteilchen beginnt die Ausbeute bei $\epsilon_0 = 95$ MeV an Stelle von 210 MeV für ruhende Kernbestandteile. Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung einzelner Mesonen ergibt sich aus dem erreichbaren Volumen des Impulsraumes und geht in der skalaren und axial-vektoriellen Theorie wie $(\epsilon/\epsilon_0)^{3,5}$, in der pseudoskalaren und polar-vektoriellen Theorie mit $(\epsilon/\epsilon_0)^{4,5}$. Für positive Mesonen liegt die Schwelle etwas höher als für negative. Für Mehrfachmesonen ist die Mindestenergie ϵ_0 ungefähr der Zahl der gebildeten Teilchen proportional. Für $n > 2$ geht der Wirkungsquerschnitt mit $(\epsilon/\epsilon_0)^{(3n+5)/2}$. Dies ist wichtig, da die Entstehung einzelner Mesonen vielleicht verboten ist. Der Absolutwert des Wirkungsquerschnittes kann wegen der kurzen De Broglie-Wellenlänge im Partikelbild abgeschätzt werden. Es ergibt sich pro Atom $\sigma = 0,025 \cdot A \cdot (\epsilon/\epsilon_0)^{4,5}$ (A : Atomgewicht). Volz (Erlangen).